

# پدیده‌های بحرانی

امیر آقامحمدی

استاد فیزیک دانشگاه الزهرا

۱۴۰۰

<https://www.youtube.com/@amiraghamohammadi>

<https://staff.alzahra.ac.ir/aghahammadi>

Critical Phenomena

سرشناسه	: آقامحمدی، امیر، ۱۳۴۰
عنوان	: پدیده‌های بحرانی
مشخصات نشر	:
مشخصات ظاهری	: مصور، جدول.
شابک	:
پشت جلد به انگلیسی:	:
کتاب‌نامه	:
نمایه	:
موضوع	: علوم پایه
شناسه افزوده	:
رده‌بندی کنگره	:

عنوان کتاب: پدیده‌های بحرانی

تألیف: امیر آقامحمدی

ویراستار ادبی:

صفحه‌آرا: امیر آقامحمدی

ناشر:

تاریخ و نوبت چاپ:

شمارگان:

قیمت:

شابک:

قطع: وزیری

مسئولیت درستی مطالب به عهده نویسنده است.

تقدیم به همه آنهایی که می‌خواهند بیشتر بدانند...



# پیش‌گفتار



من تا کنون چندین بار درس پدیده‌های بحرانی را در دانشگاه الزهرا تدریس کرده‌ام. در این مدت این درس‌نامه را برای این درس آماده و استفاده کردم. سؤال‌هایی که در کلاس درس مطرح می‌شد باعث شد بعضی از بخش‌ها تکمیل و مواردی بیش‌تر تشریح شوند. برای تهیه‌ی این درس‌نامه از مراجع مختلفی استفاده کردم از جمله کتاب‌ها و سایت‌های زیر:

- Stanley, Harry Eugene; Introduction to phase transitions and critical phenomena, Oxford University Press, (1987).
- Kardar, Mehran; Statistical physics of fields, Cambridge University Press, (2007).
- Yeomans, Julia M.; Statistical mechanics of phase transitions, Clarendon Press, (1992).
- Dalvit, Diego AR, Jaime Frastai, and Ian Lawrie; Problems on statistical mechanics, CRC Press, (1999).

- Goldenfeld, Nigel; Lectures on phase transitions and the renormalization group, Addison-Wesley, (1992)
- [physics.sharif.edu/vahid/teachingCritical.html](https://physics.sharif.edu/vahid/teachingCritical.html)

توجه داشته باشید که این درس‌نامه هنوز در شکل ابتدایی است. علاوه بر این که هنوز ناقص است، احتمالاً اشکالاتی هم دارد.

امیر آقامحمدی

تهران، ۱۴۰۰

# فهرست مطالب

۵	پیش‌گفتار
۱	۱ مقیاس‌بندی و نماهای بحرانی
۱	۱.۱ مقدمه
۱	۲.۱ دمای بحرانی در گاز و ن‌در والس
۷	۳.۱ تابع هم‌گن یک‌متغیره
۱۰	۴.۱ تابع هم‌گن چندمتغیره
۱۱	۵.۱ توابع هم‌گن تعمیم‌یافته
۱۲	۶.۱ نماهای بحرانی
۱۶	۷.۱ یک مثال
۲۰	مسائل
۲۷	۲ میدان میان‌گین
۲۷	۱.۲ مقدمه

۲۸	پارامغناطیس	۲.۲
۳۰	تقریب میدان میان‌گین مدل آیزینگ	۳.۲
۴۰	کمینه کردن انرژی آزاد	۴.۲
۴۳	معادله‌ی وندروالس	۵.۲
۴۸	مسائل	
۵۵	مدل آیزینگ: حل دقیق	۳
۵۵	مدل آیزینگ: حل دقیق	۱.۳
۵۵	روش ماتریس انتقال	۱.۱.۳
۶۲	توابع هم‌بستگی	۲.۳
۷۰	مدل آیزینگ روی یک زنجیره‌ی یک‌بعدی با شرط مرزی غیر دوره‌ای	۳.۳
۷۲	مسائل	
۷۹	بسط سری: روش‌های تقریبی برای دماهای بالا و دماهای پایین	۴
۷۹	مقدمه	۱.۴
۷۹	بسط سری: روش‌های تقریبی برای دماهای بالا	۲.۴
۸۸	بسط سری: روش‌های تقریبی برای دماهای پایین	۳.۴
۹۲	شبکه‌های اسپینی در دماهای بالا و شبکه‌های دوگان آن‌ها در دماهای پایین	۴.۴
۹۴	گذار فاز مدل آیزینگ روی شبکه‌ی مربعی در غیاب میدان مغناطیسی	۱.۴.۴
۹۵	مسائل	
۹۷	مدل هایزنبرگ	۵
۹۷	مدل هایزنبرگ	۱.۵
۹۷	مدل آیزینگ کوانتومی با میدان مغناطیسی عرضی	۲.۵
۹۸	$J = 0, h \neq 0$	۱.۲.۵
۹۸	$J \neq 0, h = 0$	۲.۲.۵
۹۹	$J \neq 0, h \neq 0$	۳.۲.۵



۹۹	تبدیل جوردن-ویگنر	۳.۵
۱۰۲	نمایش فرمیونی شبکه‌های اسپینی یک بعدی	۴.۵
۱۰۳	مثال- مدل آیزینگ کوانتمی با میدان مغناطیسی عرضی	۱.۴.۵
۱۰۸	مثال- مدل $XX$ با میدان مغناطیسی عرضی	۲.۴.۵
۱۱۰	مسائل	

۱۱۳	مدل لاندائو-گینزبرگ	۶
۱۱۳	مدل لاندائو-گینزبرگ	۱.۶
۱۲۴	مسائل	

۱۲۷	منابع	
-----	-------	--



# مقیاس بندی و نماهای بحرانی

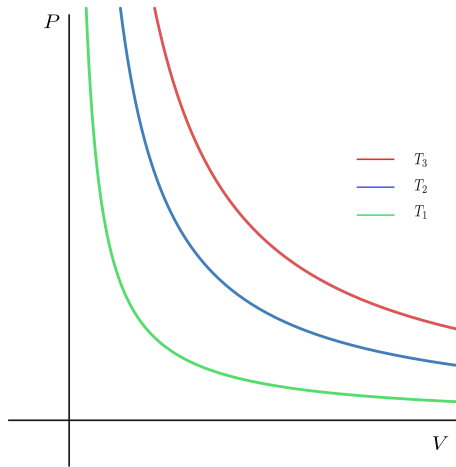
## ۱.۱ مقدمه

ما در طبیعت با تعداد زیادی ذره و عنصر متفاوت روبه‌رویم. از ترکیب اتم‌های مختلف مولکول‌های بی‌شماری ساخته می‌شوند. با این همه تنوع در دنیای میکروسکوپی، در دنیای ماکروسکوپی تعداد محدودی فاز مختلف از مواد، مثلاً سه فاز گاز، مایع و جامد وجود دارد. این همه تنوع در دنیای میکروسکوپی چگونه در دنیای ماکروسکوپی به چند فاز محدود می‌شود؟ فلزات مختلف دور و بر ما دمای ذوب، رسانش گرمایی یا الکتریکی و خلاصه مشخصات متفاوتی دارند، ولی همه‌ی آن‌ها رفتار کیفی مشابهی دارند. دمای ذوب متفاوتی دارند ولی همگی در دمای ذوب خود از فاز جامد به مایع تبدیل می‌شوند. علی‌رغم این همه تنوع، قوانین جهان‌شمولی وجود دارد.

## ۲.۱ دمای بحرانی در گاز و ن‌دروالس

در اکثر مواقع در دروس مقدماتی ترمودینامیک و مکانیک آماری از گاز ایده‌آل یا گاز کامل نام برده می‌شود. تقریباً هر جا از گاز صحبت می‌شود آن را ایده‌آل می‌گیریم. در واقع تقریباً همه‌ی گازها اگر به قدر کافی رقیق باشند ایده‌آل هستند. در شکل (۱.۱) منحنی فشار بر حسب حجم

در دمای ثابت برای گاز ایده‌آل در سه دمای متفاوت رسم شده است. در دمای اتاق و برای خیلی از گازها به شرطی که رقیق باشند این منحنی‌ها با تجربه می‌خوانند. در ضمن با تصور شهودی ما هم سازگارند. در دمای ثابت هر چه گاز را متراکم کنیم حجم گاز کم و فشار زیاد می‌شود. البته خیلی از گازها در بعضی شرایط مایع و یا جامد می‌شوند. این‌ها فازهای مختلف ماده هستند و این پدیده‌ها را در این منحنی‌ها نمی‌بینیم. برای فهم آن‌ها باید مدل جدیدی ساخت.



شکل ۱.۱ منحنی‌های فشار بر حسب حجم در سه دمای مختلف  $T_3 > T_2 > T_1$  برای گاز ایده‌آل.

اگر گاز خیلی رقیق نباشد به طوری که ذرات گاز بتوانند به هم نزدیک شوند، برهم‌کنش بین آن‌ها مهم می‌شود. در نظر گرفتن برهم‌کنش بین همه‌ی ذرات عملی نیست ولی با تقریب‌هایی می‌توانیم این‌کار را بکنیم. مدل واندروالس<sup>۱</sup> یکی از ساده‌ترین مدل‌هاست. گاز واندروالس هم مثل گاز ایده‌آل، تنها یک مدل است که کمی بیش‌تر از مدل گاز ایده‌آل می‌تواند بعضی از رفتارهای مواد واقعی را توضیح دهد. معادله‌ی حالت گاز واندروالس

$$(P + \frac{a}{V^2})(V - b) = RT, \quad (1.1)$$

است، که در این‌جا حجم یک مول است. در دماهای ثابت، خم‌های  $P - V$  را می‌توانیم رسم کنیم. در این معادله سه پارامتر  $a$ ،  $b$  و  $R$  ظاهر می‌شوند. با این پارامترها می‌توانیم متغیرهای

<sup>۱</sup> van der Waals

معادله را بی بُعد کنیم. مثلاً بُعد  $b$  حجم است. با تعریف

$$\tilde{V} := \frac{V}{b}, \quad (۲.۱)$$

$$\tilde{P} := \frac{b^2 P}{a}, \quad (۳.۱)$$

$$\tilde{T} := \frac{bRT}{a}, \quad (۴.۱)$$

معادله و ندروالس به معادله زیر

$$\left(\tilde{P} + \frac{1}{\tilde{V}^2}\right)(\tilde{V} - 1) = \tilde{T}. \quad (۵.۱)$$

یا

$$\tilde{P} = \frac{\tilde{T}}{\tilde{V} - 1} - \frac{1}{\tilde{V}^2}, \quad (۶.۱)$$

تبدیل می شود. خم های  $P$  بر حسب  $V$  در دمای ثابت یا تابعی نزولی از حجم است. با کم کردن دما یک نقطه ی عطف پیدا می کند. اگر دما را باز هم کم تر کنیم، یک کمینه و بیشینه خواهد داشت. بگذارید این موارد را بررسی کنیم. در دمای بحرانی

$$\left.\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{V}}\right|_{\tilde{T}_c, \tilde{V}_c} = 0, \quad (۷.۱)$$

$$\left.\frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial \tilde{V}^2}\right|_{T_c, V_c} = 0. \quad (۸.۱)$$

با استفاده از معادله های (۸.۱، ۷.۱، ۱.۱) می رسمیم به

$$\left.\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{V}}\right|_{\tilde{T}_c, \tilde{V}_c} = -\frac{\tilde{T}_c}{(\tilde{V}_c - 1)^2} + \frac{2}{\tilde{V}_c^3} = 0, \quad (۹.۱)$$

$$\left.\frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial \tilde{V}^2}\right|_{\tilde{T}_c, \tilde{V}_c} = \frac{2\tilde{T}_c}{(\tilde{V}_c - 1)^3} - \frac{6}{\tilde{V}_c^4} = 0 \quad (۱۰.۱)$$

که از حل این دو معادله برای  $\tilde{V}_c$  و  $\tilde{T}_c$  و جاگذاری نتیجه در (۱.۱) می رسمیم به

$$V_c = b\tilde{V}_c = 3b, \quad (۱۱.۱)$$

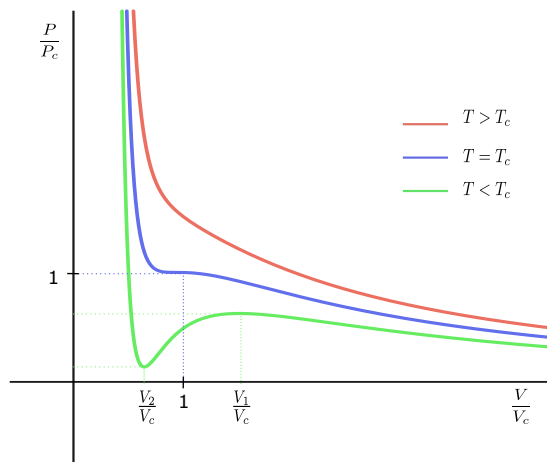
$$T_c = \frac{a}{27bR} \tilde{T}_c = \frac{8a}{27bR}, \quad (۱۲.۱)$$

$$P_c = \frac{a}{b^2} \tilde{P}_c = \frac{a}{27b^2}. \quad (۱۳.۱)$$

برای گازِ وَنِدرِوالس

$$\frac{P_c V_c}{RT_c} = \frac{3}{8}. \quad (۱۴.۱)$$

می‌توانیم از  $T_c = \frac{8a}{27bR}$  و  $P_c = \frac{a}{27b^2}$ ,  $V_c = 3b$  می‌توانیم استفاده کنیم. در شکل (۲.۱) نمودار فشار بی‌بعدشده بر حسب حجم بی‌بعدشده را ببینید. به ازای  $T > T_c$  این خم کمینه و بیشینه‌ای ندارد. به ازای  $T < T_c$  این خم یک کمینه



شکل ۲.۱ منحنی  $\frac{P}{P_c} := P^*$  بر حسب  $\frac{V}{V_c} := V^*$ ، به ازای  $T < T_c$  (منحنی سبزرنگ)،  $T = T_c$  (منحنی آبی‌رنگ)، و  $T > T_c$  (منحنی قرمزنگ).  $T_c$  دمایی است که نمودار فشار بر حسب حجم تغییر رفتار می‌دهد.  $P_c$  و  $V_c$  فشار و حجم در  $T_c$  است.

و یک بیشینه دارد. در  $T = T_c$  نقاط کمینه و بیشینه روی هم می‌افتند و یک نقطه‌ی عطف داریم. به  $T_c$  دمای بحرانی<sup>۱</sup> می‌گویند. برای دماهای کم‌تر از دمای بحرانی (که با خم سبزرنگ در شکل (۲.۱) نشان داده شده) تغییرات حجم و فشار با شهود ما سازگار نیست. ناحیه‌ی بین

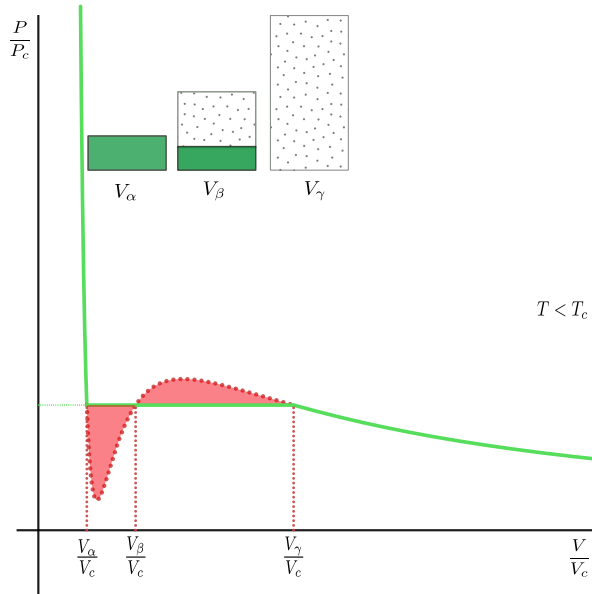
<sup>۱</sup>Critical Temperature

حجم  $V_1$  و  $V_2$  با متراکم کردن گاز فشار آن کم می‌شود که عجیب است. در واقع معادله‌ی و ندروالس برای  $T < T_c$  مشکلی دارد که باید رفع شود. در واقع در این دما که کم‌تر از دمای بحرانی است، داریم  $\frac{\partial P}{\partial V} > 0$ . در این حالت همراه با کم کردن فشار گاز متراکم می‌شود، یا اگر گاز را منبسط کنیم فشار آن زیاد می‌شود که هر دو حالت به وضوح غلط هستند. وقتی حجم از  $V_2$  کوچک‌تر می‌شود، اندازه‌ی شیب منحنی‌ی فشار-حجم خیلی زیاد می‌شود، یعنی برای تغییر حجمی کوچک باید تغییر فشار زیادی داشته باشیم. این حالت ماده دیگر گاز نیست. در این حالت مایع شده است. آنچه در تجربه با آن روبه‌رویم این است که برای  $T < T_c$  با کم کردن فشار به حجمی می‌رسیم که گاز تغییر فاز می‌دهد و مایع می‌شود. ناحیه‌ی بین حجم  $V_1$  و  $V_2$  بخشی از این ناحیه است. به زبان دقیق‌تر وقتی در دمایی کم‌تر از دمای بحرانی گاز را متراکم می‌کنیم ناحیه‌ای وجود دارد که خم فشار-حجم برای دمای ثابت، آن ماده دیگر از معادله‌ی (۱۰۱) تبعیت نمی‌کند. شکل (۳۰۱) را ببینید. خم سبز رنگ در شکل (۲۰۱) که معرف خم فشار-حجم برای دمای کم‌تر از دمای بحرانی بود تغییر می‌کند. بخشی که فشار کم و زیاد می‌شود یعنی ناحیه‌ی با حجم بین  $V_\alpha$  تا  $V_\gamma$  (بخش خط چین قرمز رنگ در شکل (۳۰۱)) با روشی که سازوکار مکسول<sup>۱</sup> نامیده می‌شود تبدیل به یک خم هم‌فشار (خط مستقیم سبز رنگ در شکل (۳۰۱)) می‌شود. این خم هم‌فشار به گونه‌ای است که مساحت دو ناحیه‌ی قرمز رنگ در شکل (۳۰۱) برابر شود. وقتی ماده کاملاً به شکل مایع است حجم آن  $V_\alpha$  است. بین این دو حجم ماده به صورت هم‌زیستی بین دو فاز مایع و گاز است. برای کمی کردن رفتار بحرانی‌ی سیستم‌ها از کمیت‌هایی که اسم‌شان نمای بحرانی<sup>۲</sup> است، استفاده می‌شود. می‌توان نشان داد که برای مدل و ندروالس در نزدیکی‌ی نقطه‌ی بحرانی و در دمای بحرانی‌ی  $T_c$

$$\frac{P - P_c}{P_c} \sim \left( \frac{V - V_c}{V_c} \right)^\delta, \quad \delta = 3. \quad (15.1)$$

در این‌جا نمای بحرانی،  $\delta = 3$  است. علامت  $\sim$  به این معناست که وقتی می‌نویسیم

$$f(t) \sim t^a \quad (16.1)$$



شکل ۳.۱ ناحیه‌ی با حجم بین  $V_\alpha$  تا  $V_\gamma$  یعنی بخش خطچین قرمز رنگ با سازوکار مکسول تبدیل به یک خم هم‌فشار یعنی خط مستقیم سبزرنگ می‌شود. این خم هم‌فشار به گونه‌ای است که مساحت دو ناحیه‌ی قرمز رنگ برابر شوند. وقتی ماده کاملاً به شکل گاز است حجم آن  $V_\gamma$  و با متراکم کردن به فاز مایع می‌رود. وقتی ماده کاملاً به شکل مایع است حجم آن  $V_\alpha$  است. بین این دو حجم ماده به صورت هم‌زیستی بین دو فاز مایع و گاز است.

یعنی

$$f(t) = Ct^a(1 + g(t)) \quad (17.1)$$

است که  $C$  مقداری ثابت است و در حد  $t \rightarrow 0$   $g(t) = 0$  است.

مجموعه‌ای از مدل‌های مختلف هستند که ممکن است به طرز چشمگیری متفاوت یا حتی در حوزه‌های مختلف فیزیک باشند، اما مثلاً در اطراف نقطه‌ی بحرانی<sup>۱</sup> رفتار آن‌ها بسیار شبیه هم باشد. در گذار بین فازهای مختلف یک ماده، بعضی از کمیت‌ها تغییرات شدیدی دارند. مثلاً آب وقتی از فاز مایع به بخار تبدیل می‌شود، چگالی‌ی آن حدود هزار برابر کم می‌شود، یعنی

<sup>1</sup>Critical Point



تابع چگالی تقریباً پرش دارد. اگر به مشتق چگالی نگاه کنیم، در نقطه‌ی گذار فاز تقریباً تکین می‌شود. این تغییر رفتارهای چشم‌گیر ناشی از تغییرات چشم‌گیر در انرژی آزاد یا تابع پارش است. در مدل ون‌دروالس هم به جای آن‌که از معادله‌ی حالت شروع کنیم می‌توانستیم از تابع پارش یا انرژی آزاد شروع کنیم. این رفتارها در حوزه‌ی تعداد زیاد ذرات ( $N \rightarrow \infty$ )، چیزی که اصطلاحاً به آن حد ترمودینامیکی<sup>۱</sup> می‌گویند، رخ می‌دهد. در مکانیک آماری فرضی در مورد رفتار انرژی آزاد در نزدیکی نقطه‌ی بحرانی به نام فرض مقیاس‌بندی ویدام<sup>۲</sup> وجود دارد.

ملاحظه ۱.۲.۱ (فرض مقیاس‌بندی ویدام) بنا بر فرض مقیاس‌بندی ویدام یا فرض مقیاس‌بندی ایستا انرژی آزاد در نزدیکی نقطه‌ی بحرانی یک تابع هم‌گن تعمیم‌یافته است.

بعداً به مساله‌ی دمای بحرانی و رفتار کمیت‌های فیزیکی در اطراف این نقطه خواهیم پرداخت. برای فهم این مطلب ابتدا باید در مورد تابع هم‌گن تعمیم‌یافته بیشتر بدانیم.

## ۳.۱ تابع هم‌گن یک‌متغیره

می‌گوییم تابع  $f(x)$  تابعی هم‌گن است، اگر به ازای همه‌ی مقادیر  $\lambda$  تابعی مثل  $g(\lambda)$  وجود داشته باشد که

$$f(\lambda x) = g(\lambda)f(x). \quad (18.1)$$

تابع هم‌گن این خاصیت را دارد که اگر مقدار آن را در یک نقطه مثل  $x_0 \neq 0$  داشته باشیم (مثلاً  $f(x_0)$ ) و تابع  $g$  هم تابعی معلوم از متغیرش باشد، مقدار تابع  $f$  در هر نقطه‌ی دل‌خواه را می‌توانیم به دست آوریم. چند سوال می‌تواند مطرح شود. آیا  $g$  را آزادانه می‌توانیم هر تابعی انتخاب کنیم یا مقید به انتخاب تابع‌های خاصی هستیم؟ در مورد تابع  $f$  چه‌طور؟ اولین چیزی که می‌توان نشان داد این است که هر دو تابع  $f$  و  $g$  مستقل از یک ضریب ثابت تابع‌های یک‌سانی از متغیرهای‌شان هستند. برای این کار از استدلال زیر استفاده می‌کنیم

$$f(\lambda x) = g(\lambda)f(x)$$

<sup>1</sup> Widom scaling hypothesis    <sup>2</sup> Thermodynamic limit

$$=g(x)f(\lambda). \quad (۱۹.۱)$$

پس

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(\lambda)}{g(\lambda)}, \quad (۲۰.۱)$$

که نتیجه می دهد  $\frac{f(x)}{g(x)}$  باید ثابت باشد. بنا بر این  $f(x) \propto g(x)$ .

**مثال ۱۰.۳.۱.** یک مثال بدیهی از توابع هم‌گن تابعی توانی است:  $Cx^k$  تابعی هم‌گن است. در این مثال  $g(\lambda) = \lambda^k$  است.

ببینیم توابع هم‌گن چه خواصی دارند و آیا به جز تابع توانی، مثال دیگری هم برای توابع هم‌گن وجود دارد؟ با دوبار مقیاس کردن به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم

$$f(\lambda\mu x) = g(\lambda)f(\mu x) = g(\lambda)g(\mu)f(x), \quad (۲۱.۱)$$

که از طرفی همان

$$f(\lambda\mu x) = g(\lambda\mu)f(x), \quad (۲۲.۱)$$

است. پس

$$g(\lambda\mu) = g(\lambda)g(\mu). \quad (۲۳.۱)$$

حالا اگر یک فرض اضافه بکنیم: تابع  $g$  مشتق پذیر است، نتیجه می‌شود

$$\frac{\partial g(\lambda\mu)}{\partial \mu} = g(\lambda) \frac{\partial g(\mu)}{\partial \mu}, \quad (۲۴.۱)$$

یا

$$\lambda \frac{\partial g(\lambda\mu)}{\partial (\lambda\mu)} = g(\lambda) \frac{\partial g(\mu)}{\partial \mu}. \quad (۲۵.۱)$$

با انتخاب  $\mu = 1$  می‌رسیم به

$$\frac{g'(\lambda)}{g(\lambda)} = \frac{g'(1)}{1} = \frac{p}{\lambda} \quad (۲۶.۱)$$

که  $g'(1) := p$  است. در این صورت

$$g(\lambda) = c\lambda^p, \quad (27.1)$$

است. با استفاده از  $p := g'(1)$ ، ثابت  $c = 1$  می‌شود. پس فرض مشتق‌پذیری منجر به این می‌شود که  $g$  فقط می‌تواند تابعی توانی از متغیرش باشد. با جاگذاری آن

$$f(x) = \left(\frac{x}{x_0}\right)^p f(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0^p} x^p \propto x^p \quad (28.1)$$

می‌شود. یعنی  $f$  هم فقط می‌تواند تابعی توانی از متغیرش باشد. اگر فرض مشتق‌پذیری  $g$  را کنار بگذاریم، و تنها فرض کنیم که تابعی پیوسته باشد با تغییر متغیرهای

$$\lambda := e^\alpha, \quad \mu := e^\beta \quad (29.1)$$

$$A(\alpha) := \ln g(e^\alpha) \quad (30.1)$$

معادله‌ی (۲۳.۱) به شکل زیر در می‌آید

$$A(\alpha + \beta) = A(\alpha) + A(\beta). \quad (31.1)$$

از این‌جا نتیجه می‌شود

$$A(2) = A(1) + A(1) = 2A(1)$$

$$A(N) = NA(1)$$

$$A(1) = 2A(1/2), \quad (32.1)$$

و بالاخره برای عدد گویای  $\frac{p}{q}$

$$A\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} A(1). \quad (33.1)$$

از آنجایی که می‌توانیم هر عدد حقیقی را بین دو عدد گویای بسیار نزدیک به هم بگیریم، با فرض پیوستگی (که شرط ضعیف‌تری نسبت به مشتق‌پذیری است)، برای هر عدد حقیقی  $\alpha$  می‌رسیم به

$$A(\alpha) = \alpha A(1), \quad (34.1)$$

که نتیجه می‌دهد  $g$  (و همین‌طور  $f$ ) تابعی توانی است.

## ۴.۱ تابع هم‌گن چندمتغیره

در بخش قبل در مورد می‌گوییم تابع هم‌گن یک‌متغیره گفتیم. اگر به جای متغیر  $x$  کمیتی برداری که چند مولفه دارد بگذاریم، برای یک تابع هم‌گن به ازای همه‌ی مقادیر  $\lambda$  تابعی مثل  $g(\lambda)$  وجود داشته باشد که

$$f(\lambda \mathbf{r}) = g(\lambda) f(\mathbf{r}), \quad (35.1)$$

یا

$$f(\lambda x, \lambda y, \dots) = g(\lambda) f(x, y, \dots). \quad (36.1)$$

همان استدلال‌های بخش قبل را می‌توانیم تکرار کنیم که نتیجه می‌دهد،

$$g(\lambda) = \lambda^p. \quad (37.1)$$

**مثال ۴.۱.۱.** هر تابع هم‌گن دو متغیره را می‌توان به صورت‌های زیر نوشت

$$f(x, y) = y^p F_1\left(\frac{x}{y}\right), \quad (38.1)$$

$$= x^p F_2\left(\frac{y}{x}\right), \quad (39.1)$$

کافی است در رابطه‌ی

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^p f(x, y), \quad (40.1)$$

$\lambda$  را  $\frac{1}{y}$  انتخاب کنیم. در این صورت

$$f\left(\frac{x}{y}, 1\right) = y^{-p} f(x, y). \quad (۴۱.۱)$$

اما  $f\left(\frac{x}{y}, 1\right)$  تابعی از  $\frac{x}{y}$  مثل  $F_1\left(\frac{x}{y}\right)$  است. پس

$$f(x, y) = y^p F_1\left(\frac{x}{y}\right). \quad (۴۲.۱)$$

برعکس این قضیه هم صحیح است، یعنی هر تابع به شکل  $y^p F_1\left(\frac{x}{y}\right)$  یک تابع هم‌گن است.

## ۵.۱ توابع هم‌گنِ تعمیم‌یافته

تعریفی که برای تابع هم‌گن داشتیم را به صورت زیر تعمیم می‌دهیم

$$f(\lambda^a x, \lambda^b y, \dots) = \lambda^p f(x, y, \dots). \quad (۴۳.۱)$$

البته این رابطه را با تعریف  $\mu := \lambda^p$  می‌توانیم ساده‌تر بنویسیم

$$f(\mu^{a'} x, \mu^{b'} y, \dots) = \mu f(x, y, \dots), \quad (۴۴.۱)$$

که  $a/p := a'$ ،  $b/p := b'$ ، و  $\dots$  است. بنا بر این با یک بازتعریف می‌توانیم  $p = 1$  کنیم.

پس بدون از دست دادن هیچ‌گونه تعمیمی توابع هم‌گنِ تعمیم‌یافته را به صورت

$$f(\lambda^a x, \lambda^b y, \dots) = \lambda f(x, y, \dots). \quad (۴۵.۱)$$

هم می‌شود تعریف کرد.

**مثال ۱.۵.۱.** هر تابع هم‌گنِ تعمیم‌یافته‌ی دومتغیره

$$f(\lambda^a x, \lambda^b y) = \lambda f(x, y). \quad (۴۶.۱)$$

را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$f(x, y) = y^{1/b} F\left(\frac{x}{y^{a/b}}\right). \quad (۴۷.۱)$$

برای اثبات کافی است  $\lambda$  را  $y^{-1/b}$  انتخاب کنیم. در این صورت

$$f(y^{-a/b}x, 1) = y^{-1/b}f(x, y). \quad (48.1)$$

اما  $f(y^{-a/b}x, 1)$  تابعی مثل  $F(\frac{x}{y^{a/b}})$  است. پس

$$f(x, y) = y^{1/b}F(\frac{x}{y^{a/b}}). \quad (49.1)$$

## ۶.۱ نماهای بحرانی

بنا بر فرض مقیاس بندی ویدام یا فرض مقیاس بندی ایستا انرژی آزاد در نزدیکی نقطه بحرانی یک تابع هم‌گن تعمیم یافته است. برای یک سیستم مغناطیسی، انرژی آزاد تابعی هم‌گن تعمیم یافته از میدان مغناطیسی  $B$  و دمای کاهش یافته  $t := \frac{T - T_c}{T_c}$  است.  $T_c$  دمای بحرانی و  $t$  پارامتری بی‌بعد برای کمی کردن نزدیکی یا دوری به نقطه بحرانی است. پس

$$\mathcal{F}(\lambda^a t, \lambda^b B) = \lambda \mathcal{F}(t, B). \quad (50.1)$$

بنا بر این می‌توان آن را به شکل‌های

$$\mathcal{F}(t, B) = \begin{cases} t^{1/a} F(\frac{B}{t^{b/a}}) \\ B^{1/b} \tilde{F}(\frac{t}{B^{a/b}}) \end{cases} \quad (51.1)$$

نوشت. با استفاده از انرژی آزاد کمیت‌های فیزیکی‌ای مثل مغناطش، پذیرفتاری مغناطیسی، انرژی، ظرفیت گرمایی و ... را می‌توانیم محاسبه کنیم. همه‌ی آن‌ها قابل بیان بر حسب انرژی آزاد و مشتقات آن هستند و در نزدیکی نقطه بحرانی تابع هم‌گن تعمیم یافته هستند. جدول ۱.۱ را ببینید. مثلاً مغناطش از مشتق‌گیری انرژی آزاد نسبت به میدان مغناطیسی به دست می‌آید

$$M = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial B}. \quad (52.1)$$

پس

$$\lambda^b M(\lambda^a t, \lambda^b B) = \lambda M(t, B), \quad (53.1)$$

جدول ۱.۱ چند نمای بحرانی در سیستم‌های مغناطیسی

$$\begin{aligned} C(t, B = 0) &\sim |t|^{-\alpha} \\ M(t, B = 0) &\sim |t|^\beta \\ M(t = 0, B) &\sim B^{1/\delta} \\ \chi(t, B = 0) &\sim |t|^{-\gamma} \end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد مغناطش هم تابعی هم‌گن تعمیم‌یافته‌ی از میدان مغناطیسی  $B$  و  $t$  است. بنا بر این می‌توان آن را به شکل‌های

$$M(t, B) = \begin{cases} |t|^{(1-b)/a} M\left(\frac{t}{|t|}, \frac{B}{|t|^{b/a}}\right), \\ B^{(1-b)/b} \tilde{g}\left(\frac{t}{B^{a/b}}\right). \end{cases} \quad (54.1)$$

در غیاب میدان مغناطیسی نتیجه می‌شود

$$M(t, 0) = |t|^{(1-b)/a} M\left(\frac{t}{|t|}, 0\right) \sim |t|^{(1-b)/a}. \quad (55.1)$$

پس

$$M(t, 0) \sim |t|^\beta, \quad (56.1)$$

که  $\beta := \frac{1-b}{a}$  یک نمای بحرانی است. ضربی که در رابطه‌ی (۵۶.۱) ظاهر می‌شود برای  $t < 0$  و  $t > 0$  یعنی  $M(1, 0)$  یا  $M(-1, 0)$  ممکن است متفاوت باشند. وقتی می‌گوییم

$$A(t) \sim t^\varphi, \quad (57.1)$$

یعنی

$$A(t) = t^\varphi (C + r(t)), \quad (58.1)$$

که  $t^\varphi$  تابعی تکین،  $C$  مقداری ثابت و  $r(t)$  تابعی منظم<sup>۱</sup> است. با جاگذاری  $t = 0$  و

<sup>۱</sup> Regular function

می‌رسیم به  $\lambda = B^{-1/b}$  در (۵۳.۱)

$$B^{-1}M(0, 1) = B^{-1/b}M(0, B), \quad (۵۹.۱)$$

یا

$$M(0, B) = B^{(1-b)/b}M(0, 1) \sim B^{(1-b)/b}. \quad (۶۰.۱)$$

این نتیجه را با جاگذاری  $t = 0$  در معادله‌ی دوم (۵۴.۱) هم می‌شود مستقیماً به دست آورد. پس در نزدیکی دمای بحرانی و در حضور میدان مغناطیسی

$$M(0, B) \sim B^{1/\delta}, \quad \delta := \frac{b}{1-b}. \quad (۶۱.۱)$$

پس به طور خلاصه

$$\begin{cases} M(t, 0) \sim |t|^{(1-b)/a}, \\ M(0, B) \sim B^{(1-b)/b}. \end{cases} \quad (۶۲.۱)$$

پذیرفتاری مغناطیسی در دمای ثابت یعنی پاسخ سیستم به تغییرات میدان مغناطیسی خارجی با

$$\chi(t, B) = \left( \frac{\partial M}{\partial B} \right)_T, \quad (۶۳.۱)$$

تعریف می‌شود. با استفاده از این تعریف و مشتق‌گیری از (۵۴.۱) می‌رسیم به

$$\chi(t, B) = |t|^{(1-2b)/a} g' \left( \frac{B}{|t|^{b/a}} \right), \quad (۶۴.۱)$$

که علامت پریم روی تابع به معنی مشتق‌گیری از تابع نسبت به متغیرش است. پس پذیرفتاری مغناطیسی هم یک تابع هم‌گن تعمیم‌یافته‌ی از میدان مغناطیسی  $B$  و  $t$  است و

$$\chi(t, 0) \sim |t|^{-\gamma}, \quad \gamma := \frac{2b-1}{a}. \quad (۶۵.۱)$$



$\chi(0, B)$  را هم با مشتق‌گیری از معادله‌ی دوم (۶۲.۱) و هم محاسبه‌ی صریح می‌توانیم به دست آوریم. در این صورت

$$\begin{cases} \chi(t, 0) \sim |t|^{(1-2b)/a}, \\ \chi(0, B) \sim B^{(1-2b)/b}. \end{cases} \quad (۶۶.۱)$$

با استفاده از انرژی‌ی آزاد می‌توانیم انرژی‌ی میان‌گین و ظرفیت‌گرمایی را هم به دست آورد.

$$E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Q = \frac{\partial(\beta \mathcal{F})}{\partial \beta} = \mathcal{F} + \beta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta}. \quad (۶۷.۱)$$

در این‌جا از  $\mathcal{F} = -KT \ln Q$  استفاده کرده‌ایم. با توجه به این‌که  $\beta = \frac{1}{KT}$  است،

$$\frac{\partial}{\partial \beta} = -KT^2 \frac{\partial}{\partial T},$$

که با استفاده از آن (۶۷.۱) تبدیل می‌شود به

$$\begin{aligned} E &= \mathcal{F} - T \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} \\ &= \mathcal{F} - \frac{T}{T_c} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \\ &\sim |t|^{1/a} F\left(\frac{B}{|t|^{b/a}}\right) - \frac{T}{T_c} |t|^{(1/a)-1} \left[ \frac{1}{a} F\left(\frac{B}{|t|^{b/a}}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{B}{|t|^{b/a}} F'\left(\frac{B}{|t|^{b/a}}\right) \right] \end{aligned} \quad (۶۸.۱)$$

$$\sim |t|^{(1/a)-1} G\left(\frac{B}{|t|^{b/a}}\right). \quad (۶۹.۱)$$

در معادله‌ی (۶۸.۱) در حد  $t \rightarrow 0$  جمله‌ی اول نسبت به جمله‌ی دوم قابل چشم‌پوشی است و آن را دور ریخته‌ایم و جمله‌ی داخل کروشه هم تابعی از  $\frac{B}{|t|^{b/a}}$  است که آن را در (۶۹.۱) با  $G$  نمایش داده‌ایم. ظرفیت‌گرمایی

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} \sim |t|^{(1/a)-2} G\left(\frac{B}{|t|^{b/a}}\right). \quad (۷۰.۱)$$

پس

$$C \sim |t|^{-\alpha}, \quad \alpha := 2 - \frac{1}{a}. \quad (۷۱.۱)$$

ما تا این‌جا چندین پارامتر داشتیم،  $a, b, \alpha, \beta, \gamma, \delta$  که مستقل نیستند و کافی است دو تا از آن‌ها مثلاً  $a$  و  $b$  را مستقل بگیریم. در این صورت

$$\alpha = \frac{2a - 1}{a}, \quad (۷۲.۱)$$

$$\beta = \frac{1 - b}{a}, \quad (۷۳.۱)$$

$$\gamma = \frac{2b - 1}{a}, \quad (۷۴.۱)$$

$$\delta = \frac{b}{1 - b}. \quad (۷۵.۱)$$

## ۷.۱ یک مثال

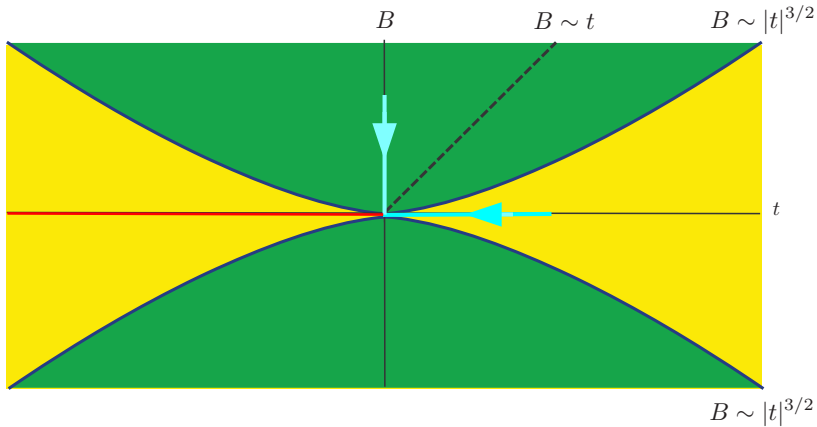
چنان‌که در فصل‌های بعد هم خواهیم دید، در تقریب نقطه‌ی زینی انرژی آزاد یک سیستم مغناطیسی به شکل زیر می‌شود

$$\mathcal{F} = \min \left[ \frac{t}{2} m^2 + um^4 - Bm \right], \quad (۷۶.۱)$$

که  $m$  مغناطش،  $B$  میدان مغناطیسی،  $u$  پارامتری ثابت و مثبت و  $t$  دمای کاهش‌یافته است. برای به دست آوردن انرژی‌ی آزاد باید کمیت درون کروشه را نسبت به مغناطش،  $m$ ، کمینه کرد.

$$\left. \frac{d\mathcal{F}}{dm} \right|_{m=m^*} = tm^* + 4um^{*3} - B = 0. \quad (۷۷.۱)$$

با تغییر  $t$  و  $B$ ، اندازه‌ی  $m^*$  و رفتار انرژی‌ی آزاد در نزدیکی نقطه‌ی بحرانی متفاوت است. اگر فضای پارامترهای مسئله را فضایی دوبعدی بگیریم، که محور افقی‌ی آن  $t$  و محور عمودی‌ی آن  $B$  باشد، نقطه‌ی بحرانی  $B = 0, t = 0$  است. می‌خواهیم رفتار تابع انرژی‌ی آزاد در نزدیکی نقطه‌ی بحرانی را بررسی کنیم. شکل (۴.۱) را ببینید.



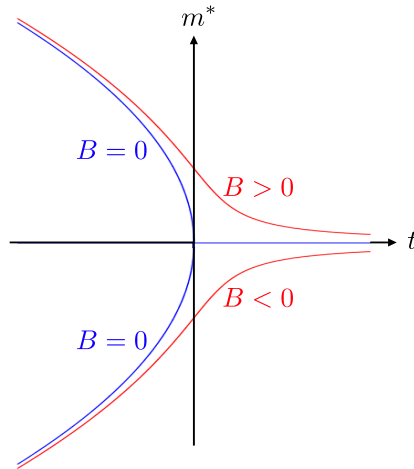
شکل ۴.۱ رفتار انرژی آزاد در نزدیکی نقطه بحرانی  $t = 0, B = 0$ . در نواحی زرد رنگ و سبز رنگ رفتار انرژی آزاد متفاوت است.

روی محور افقی یعنی،  $B = 0$

$$tm^* + 4um^{*3} = 0, \Rightarrow m^* = 0, \pm \sqrt{\frac{-t}{4u}}. \quad (۷۸.۱)$$

برای دماهای بزرگتر از دمای بحرانی،  $T > T_c$ ، (یا  $t > 0$ ) جواب قابل قبول  $m^* = 0$  است. برای دماهای کوچکتر از دمای بحرانی،  $T < T_c$ ، (یا  $t < 0$ ) جواب قابل قبول  $m^* = \pm \sqrt{\frac{-t}{4u}}$  است. در شکل (۵.۱) منحنی  $m^*$  بر حسب  $t$  به ازای میدان‌های مغناطیسی متفاوت را ببینید. در دماهای بالاتر از دمای بحرانی، سیستم در فاز بی‌نظم است و مغناطش صفر است. در دمای  $T_c$  گذار فاز رخ می‌دهد و سیستم می‌تواند یکی از دو مقدار مثبت و یا منفی مغناطش را در غیاب میدان مغناطیسی خارجی اختیار کند. در غیاب میدان مغناطیسی هیچ جهت ارجحی وجود ندارد. در دماهای بالاتر از دمای بحرانی مغناطش صفر است و سیستم این تقارن را نشان می‌دهد. اما وقتی سیستم سرد می‌شود، و دما از دمای بحرانی کم‌تر می‌شود اصطلاحاً می‌گوییم شکست خودبه‌خود تقارن<sup>۱</sup> رخ داده است و در غیاب میدان مغناطیسی خارجی سیستم از خودش مغناطش خودبه‌خود نشان می‌دهد.

<sup>۱</sup>Spontaneous symmetry breaking



شکل ۵.۱ منحنی  $m^*$  بر حسب  $t$  به ازای  $B$ . به ازای  $B = 0$  در دماهای بالاتر از دمای بحرانی، سیستم در فاز بی‌نظم است و مغناطش صفر است. در دمای  $T_c$  گذار فاز رخ می‌دهد و سیستم می‌تواند یکی از دو مقدار مثبت و یا منفی مغناطش خود به خود را در غیاب میدان مغناطیسی خارجی اختیار کند.

انرژی آزاد به ازای این مقادیر مغناطش عبارت است از

$$\mathcal{F}\Big|_{m^*=0} = 0, \quad t > 0, \quad B = 0, \quad (۷۹.۱)$$

$$\mathcal{F}\Big|_{m^*=\sqrt{\frac{-t}{4u}}} = -\frac{t^2}{16u}, \quad t < 0, \quad B = 0. \quad (۸۰.۱)$$

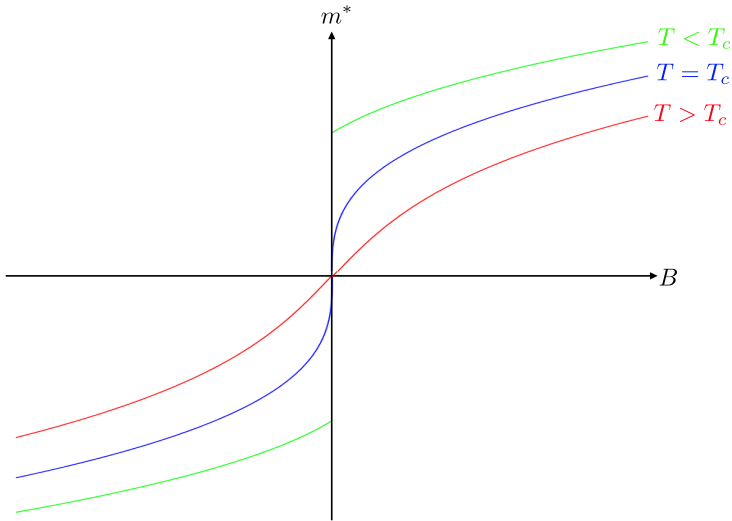
روی محور عمودی یعنی،  $t = 0$

$$4um^{*3} - B = 0, \quad \Rightarrow \quad m^* = \left(\frac{B}{4u}\right)^{1/3}. \quad (۸۱.۱)$$

شکل (۶.۱) را ببینید.

$$\mathcal{F}\Big|_{m^*=\left(\frac{B}{4u}\right)^{1/3}} = -\frac{3B^{4/3}}{4^{4/3}u^{1/3}}, \quad t = 0, \quad B \neq 0. \quad (۸۲.۱)$$

همان‌طور که گفتیم بنا بر فرض مقیاس‌بندی و ویدام، انرژی آزاد در نزدیکی نقطه‌ی



شکل ۶.۱ منحنی مغناطش  $m$ ، بر حسب میدان مغناطیسی  $B$  به ازای دماهای مختلف.

بحرانی یک تابع هم‌گن تعمیم‌یافته است، پس باید به شکل عمومی

$$\mathcal{F} = |t|^a g\left(\frac{B}{|t|\Delta}\right) \quad (۸۳.۱)$$

باشد. با مقایسه‌ی این شکل کلی با (۸۰.۱) نتیجه می‌شود

$$a = 2, \quad g(0) = -\frac{1}{16u} \quad (۸۴.۱)$$

است. پس تا این‌جا

$$\mathcal{F} = t^2 g\left(\frac{B}{|t|\Delta}\right). \quad (۸۵.۱)$$

با مقایسه‌ی (۸۵.۱) و (۸۲.۱) نتیجه می‌شود

$$\mathcal{F} = \lim_{t \rightarrow 0} t^2 g\left(\frac{B}{|t|\Delta}\right) \sim -\frac{3B^{4/3}}{4^{4/3}u^{1/3}}, \quad B \neq 0. \quad (۸۶.۱)$$

بنا بر این

$$\lim_{t \rightarrow 0} g\left(\frac{B}{|t|\Delta}\right) \sim -\frac{3B^{4/3}}{4^{4/3}u^{1/3}t^2} = -\frac{3}{4^{4/3}u^{1/3}}\left(\frac{B}{|t|^{3/2}}\right)^{4/3}. \quad (۸۷.۱)$$

از این‌جا  $\Delta = 3/2$  و

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \sim -\frac{3}{4^{4/3}u^{1/3}}x^{4/3}. \quad (۸۸.۱)$$

حالا می‌توانیم رفتار انرژی‌ی آزاد در نزدیکی نقطه‌ی بحرانی را در فضای دو پارامتره‌ی  $B$  و  $t$  به دست آوریم. در شکل (۴.۱) فضا را به نواحی‌ی سبز و زرد تقسیم کرده‌ایم. اگر در این فضا روی هر خمی مثل  $t \sim B$  در ناحیه‌ی سبزرنگ در شکل (۴.۱) به نقطه‌ی بحرانی نزدیک شویم

$$\mathcal{F} = \lim_{t \rightarrow 0} t^2 g\left(\frac{t}{|t|^{3/2}}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} t^2 g(t^{-1/2}) \sim t^{4/3} \sim B^{4/3}. \quad (۸۹.۱)$$

در این‌جا از (۸۸.۱) استفاده کرده‌ایم. رفتار در نزدیکی نقطه‌ی بحرانی برای نواحی‌ی سبزرنگ مثل محور  $B$  است.

اگر در این فضا روی هر خمی مثل  $t \sim B^{3/2+e}$ ,  $e > 0$  در ناحیه‌ی زردرنگ در شکل (۴.۱) به نقطه‌ی بحرانی نزدیک شویم

$$\mathcal{F} = \lim_{t \rightarrow 0} t^2 g\left(\frac{t^{3/2+e}}{|t|^{3/2}}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} t^2 g(0) \sim t^2. \quad (۹۰.۱)$$

در این‌جا از (۸۴.۱) استفاده کرده‌ایم. بنا بر این رفتار در نزدیکی نقطه‌ی بحرانی برای نواحی‌ی سبزرنگ مثل محور  $B$  و رفتار در نزدیکی نقطه‌ی بحرانی برای نواحی‌ی زردرنگ مثل محور  $t$  است. البته توجه داریم که این نتایجی که در این مثال به دست آوردیم دقیق نیستند و در حدّ تقریب نقطه‌ی زینی درست هستند.

۱.۱ الف- نشان دهید که برای مدل ون‌دروالس اگر دما همان دمای بحرانی باشد در نزدیکی نقطه‌ی بحرانی

$$\frac{P - P_c}{P_c} \sim \left( \frac{V - V_c}{V_c} \right)^\delta, \quad (91.1)$$

است که نمای بحرانی‌ی  $\delta = 3$  است.

ب- اگر در نزدیکی نقطه‌ی بحرانی  $P = P_c$  باشد، برای  $T \gtrsim T_c$

$$\frac{V - V_c}{V_c} \sim \left( \frac{T - T_c}{T_c} \right)^\beta, \quad (92.1)$$

است. نمای بحرانی‌ی  $\beta$  چه قدر است؟

۲.۱ تراکم‌پذیری در دمای ثابت با رابطه‌ی

$$\kappa_T := -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T. \quad (93.1)$$

نشان دهید برای گاز ون‌دروالس در نزدیکی دمای بحرانی

$$\kappa_T = -\frac{4b}{3R} (T - T_c)^{-1}, \quad (94.1)$$

است.

۳.۱ معادله‌ی حالت ماده‌ای

$$P\sqrt{V^2 - b^2} = RT \exp\left(-\frac{a}{RTV^2}\right) \quad (95.1)$$

است.

الف- در چه حدهایی این معادله‌ی حالت به معادله حالت گاز کامل تبدیل می‌شود؟

ب- نشان دهید

$$\left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = \left( \frac{2a}{RTV^3} - \frac{V}{V^2 - b^2} \right) P. \quad (96.1)$$

ج- حجم، دما و فشار در نقطه‌ی بحرانی،  $V_c$ ،  $T_c$  و  $P_c$  را به دست آورید.

۴.۱ معادله‌ی حالت ماده‌ای

$$P(V - Nb) = NkT \exp\left(-\frac{Na}{kTV}\right) \quad (97.1)$$

است. این معادله‌ی حالت معادله‌ی دیاتریچی<sup>۱</sup> است.  
الف- حجم، دما و فشار در نقطه‌ی بحرانی،  $V_c$ ،  $T_c$  و  $P_c$  را به دست آورید.  
ب- در دمای  $T = T_c$  و در نزدیکی نقطه‌ی بحرانی

$$\frac{P - P_c}{P_c} \sim \left(\frac{V - V_c}{V_c}\right)^\delta, \quad (98.1)$$

نمای بحرانی  $\delta$  را به دست آورید.

۵.۱ الف- تعمیمی از معادله حالت گاز و ندروالس عبارت است از

$$\left(P + \frac{a}{V^n}\right)(V - b) = RT,$$

است، که  $V$  در این جا حجم یک مول و  $n > 1$  عددی صحیح است.

الف- مقادیر بحرانی  $V_c$ ،  $P_c$  و  $T_c$  را به دست آورید.

ب- نماهای بحرانی  $\beta$  و  $\delta$  را به دست آورید.

۶.۱ الف- نشان دهید هر تابع هم‌گن دومتغیره

$$f(\lambda x, \lambda y) = g(\lambda)f(x, y)$$

را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$f(x, y) = x^p A\left(\frac{y}{x}\right).$$

ب- نشان دهید هر تابع  $x^p A\left(\frac{y}{x}\right)$  یک تابع هم‌گن است.

ج- برای یک سیستم مغناطیسی و برای مدل لاندائو-گینزبرگ و در حد تقریب نقطه‌ی

زینی در نزدیکی نقطه‌ی بحرانی انرژی‌ی آزاد را

$$\mathcal{F} \sim t^2 g\left(\frac{B}{|t|\Delta}\right), \quad (99.1)$$

<sup>۱</sup>Dieterici equation



گرفتیم. در تقریب مرتبه‌ی بالاتر

$$\mathcal{F} \sim |t|^{2-\alpha} g\left(\frac{B}{|t|\Delta}\right), \quad (100.1)$$

است. مغناطش و پذیرفتاری مغناطیسی در نزدیکی نقطه‌ی بحرانی چه رفتاری دارند؟

د- ظرفیت گرمایی در نزدیکی نقطه‌ی بحرانی چه رفتاری دارد؟

۷.۱ تابع هم‌گن تعمیم‌یافته به صورت

$$f(\lambda^a x, \lambda^b y, \dots) = \lambda f(x, y, \dots). \quad (101.1)$$

تعریف می‌شود.

الف- نشان دهید تابع‌های دومتغیره‌ی

$$(i) \quad f_1(x, y) = x^2 + y^5, \quad (102.1)$$

$$(ii) \quad f_2(x, y) = x^2 y^5 + x^5 y^2, \quad (103.1)$$

تابع‌های هم‌گن تعمیم‌یافته هستند. مقادیر  $a$  و  $b$  را برای هرکدام به دست آورید.

ب- نشان دهید

$$f(x, y) = x^{1/a} F\left(\frac{y}{x^{b/a}}\right) = y^{1/a} \tilde{F}\left(\frac{x}{y^{a/b}}\right). \quad (104.1)$$

تابع‌های  $F$  و  $\tilde{F}$  را برای هر دو حالت  $(i)$  و  $(ii)$  به دست آورید.

ج- آیا تابع

$$f_3(x, y) = xy + \frac{y^2}{x}, \quad (105.1)$$

یک تابع هم‌گن تعمیم‌یافته است؟

۸.۱ الف- نماهای بحرانی توابع زیر را به ازای  $t \rightarrow 0$  به دست آورید.

$$(i) \quad f_1(t) = At^{1/3} + Bt^{2/3} + ct^2, \quad (106.1)$$

$$(ii) \quad f_2(t) = At^{-1/4}(Bt + C)^{2/3}, \quad (107.1)$$

$$(iii) \quad f_3(t) = A - Bt^{1/2}, \quad (108.1)$$

$$(iv) \quad f_4(t) = A \ln\{\exp(t^{-4}) - 1\} \quad (109.1)$$

$$(v) \quad f_5(t) = At \ln|t| + B \quad (110.1)$$

$$(vi) \quad f_6(t) = t^{1/2} \left( 1 - \exp\left(\frac{t^2}{1+t}\right) \right). \quad (111.1)$$

$B, A$  و  $C$  ضرایبی ثابت هستند.

۹.۱ روابط زیر بین نماهای بحرانی را اثبات کنید

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2, \quad (112.1)$$

$$\alpha + \beta(1 + \delta) = 2. \quad (113.1)$$

۱۰.۱ در نزدیکی نقطه بحرانی رابطه‌ی زیر بین مغناطش،  $M$  و میدان مغناطیسی،  $B$  برقرار است

$$B \sim aM(t + bM^2)^\theta, \quad 1 < \theta < 2, \quad 0 < a, b. \quad (114.1)$$

الف- نماهای بحرانی  $\beta, \gamma$  و  $\delta$  را به دست آورید.

ب- آیا این نماهایی که به دست آورده‌اید، روابطی که در مسئله‌ی قبل اثبات کرده‌اید، را برآورده می‌کنند؟

۱۱.۱ گازی از  $N$  ذره به جرم  $m$  تشکیل شده که هر دو ذره‌ی  $i$  و  $j$  با پتانسیل

$$U_{ij} = ar_{ij}^{-\nu}, \quad a \geq 0, \nu > 0 \quad (115.1)$$

برهم‌کش دارند که  $r_{ij} := |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$  فاصله‌ی نسبی‌ی دو ذره‌ی  $i$  و  $j$  است. حجم گاز  $V$  و دمای آن  $T$  است.

الف- برای این گاز انرژی

$$E = \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m} - \sum_{\langle ij \rangle} \frac{a}{r_{ij}^\nu} \quad (116.1)$$

است، که نماد  $\sum_{\langle ij \rangle}$ ، یعنی جمع روی همه‌ی  $i$  و  $j$  های مختلف. نشان دهید تابع پارش

$$Z(T, V, N) = \int d^{3N} \mathbf{r} \int d^{3N} \mathbf{p} \exp(-\beta E), \quad (117.1)$$

تابع هم‌گن تعمیم‌یافته است.

$$Z(\alpha T, \alpha^{-3/\nu} V, N) = \alpha^{3N(1/2-1/\nu)} Z(T, V, N) \quad (118.1)$$

ب- با استفاده از تعریف انرژی آزاد،  $F = -kT \ln Z$  نشان دهید

$$T \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_V - \frac{3}{\nu} V \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = F - 3 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\nu} \right) NkT. \quad (119.1)$$

۱۲.۱ سی ان ینگ<sup>۱</sup> در سال ۱۹۵۲ مغناطش میان‌گین برای مدل آیزینگ روی یک شبکه‌ی مربعی برای دمایی کمتر از دمای بحرانی را به طور دقیق محاسبه کرد. نتیجه‌ی او را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$m = \left[ 1 - \frac{1}{\sinh^4(2J/kT)} \right]^{1/8}. \quad (120.1)$$

به ازای دماهای بزرگ‌تر از دمای بحرانی مغناطش صفر است.

الف- دمای بحرانی  $T_c$  چه قدر است؟ نمای بحرانی  $\beta$  را برای مدل آیزینگ روی یک شبکه‌ی مربعی به دست آورید.

ب- مغناطش میان‌گین در نزدیکی نقطه‌ی بحرانی عبارت است از

$$m = a(-t)^\beta [1 - bt + \dots]. \quad (121.1)$$

ثابت‌های  $a$  و  $b$  را بر حسب دمای بحرانی  $T_c$  به دست آورید.

۱۳.۱ در تقریب نقطه‌ی زینی انرژی آزاد یک سیستم مغناطیسی به شکل زیر است

$$\mathcal{F} = \min \left[ \frac{t}{2} m^2 + am^{2n} - Bm \right],$$

که  $m$  مغناطش،  $a$  پارامتری ثابت و مثبت،  $t$  دمای کاهش یافته،  $B$  میدان مغناطیسی خارجی و  $n$  عددی صحیح و مثبت است. نماهای بحرانی  $\beta$  و  $\delta$  را به دست آورید.



# میدانِ میان‌گین

## ۱.۲ مقدمه

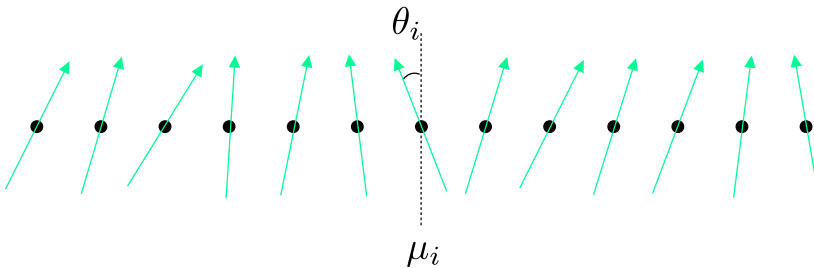
در فصل قبل با نماهای بحرانی آشنا شدیم. در این فصل می‌خواهیم در مدل‌هایی ساده از دستگاه‌های بس‌ذره‌ای تابع پارش، انرژی آزاد و دسته‌ای از کمیت‌های فیزیکی را بررسی و بعضی از نماهای بحرانی را محاسبه کنیم. همان‌طور که در مکانیک کلاسیک هم دیده‌اید، هر وقت تعداد ذرات از سه ذره بیشتر می‌شود، حل دقیق مسائل سخت یا معمولاً ناممکن می‌شود. در مکانیک آماری با تعداد زیادی ذره سروکار داریم. در درس مکانیک آماری با دستگاه‌های بس‌ذره‌ای که ذرات فقط با میدانی خارجی برهم‌کنش دارند آشنا شدید. اما در حالت واقعی ذرات با هم نیز برهم‌کنش دارند. در این حالت محاسبه‌ی دقیق کمیت‌های آماری بسیار پیچیده‌تر و گاهی ناممکن است. بنا بر این مجبوریم به روش‌های تقریبی متوسل شویم. یکی از تقریب‌های معمول در مکانیک آماری، تقریب میدان میان‌گین<sup>۱</sup> است. در دستگامی از ذرات که برهم‌کنش دارند، هر ذره با تعدادی از ذرات دیگر برهم‌کنش دارد، که ما این‌جا اسم‌شان را هم‌سایه‌های آن ذره می‌گذاریم. ایده‌ی تقریب میدان میان‌گین این است که به جای برهم‌کنش یک ذره با ذرات دیگر مقدار میان‌گین آن برهم‌کنش‌ها را جاگذاری کنیم. اگر تعداد هم‌سایه‌های یک ذره زیاد باشد،

<sup>۱</sup> mean field approximation

اُفت‌وخیز حولِ مقدارِ میان‌گین کم و این تقریب کارآمد است. اما هرچه هم‌سایه‌ها کم‌تر باشند، اُفت‌وخیز حولِ مقدارِ میان‌گین بیش‌تر می‌شود و احتمالاً این تقریب کم‌فایده‌تر می‌شود. برای همین است که خیلی وقت‌ها در دستگاه‌های شبکه‌ای یک‌بُعدی اگر هر ذره با دو هم‌سایه‌ی مجاورش برهم‌کنش داشته باشد، این تقریب جوابِ غلط می‌دهد. اما در مدل‌هایی که تعدادِ هم‌سایه‌ها بسیار زیاد می‌شود، حتی این تقریب می‌تواند با حلِ دقیق یکی شود. بیش‌ترِ مثال‌هایی که این‌جا می‌زنیم، در موردِ شبکه‌های اسپینی است. این شبکه تعدادی جای‌گاه<sup>۱</sup> دارد، که هر دو جای‌گاه می‌توانند با یک رابط<sup>۲</sup> به هم مربوط باشند.

## ۲.۲ پارامغناطیس

ابتدا دستگاهی از ذرات بدونِ برهم‌کنش داخلی و در حضورِ خارجی را بررسی کنیم.  $N$  دوقطبی‌ی مغناطیسی بدونِ برهم‌کنش در حضورِ یک میدانِ مغناطیسی خارجیِ یک‌نواختِ  $B$  روی شبکه‌ای یک‌بُعدی قرار دارند.



شکل ۱.۲  $N$  دوقطبی‌ی مغناطیسی بدونِ برهم‌کنش در حضورِ یک میدانِ مغناطیسی خارجیِ یک‌نواختِ  $B$  روی شبکه‌ای یک‌بُعدی.

همیلتونی سیستم

$$\begin{aligned} H &= - \sum_i \mu_i \cdot \mathbf{B} \\ &= - \mu B \sum_i \cos \theta_i \end{aligned} \quad (1.2)$$

است، که جهتِ میدانِ مغناطیسی را به عنوانِ محورِ  $z$  انتخاب کرده‌ایم. دوقطبی‌ی مغناطیسی

می‌تواند هر جهت‌گیری فضایی،  $(\theta_i, \phi_i)$  داشته باشد. تابع پارشِ سیستم  $N$  ذره‌ای عبارت است از

$$Z_N = \sum e^{-\beta H} = \int d^N \Omega e^{-\beta H} = Z_1^N \quad (۲.۲)$$

که

$$\begin{aligned} Z_1 &= \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} d \cos \theta d\phi e^{\beta \mu B \cos \theta} \\ &= \frac{4\pi \sinh(\beta \mu B)}{\beta \mu B}. \end{aligned} \quad (۳.۲)$$

اگر اسپین را کوانتومی بگیریم، در این صورت

$$\begin{aligned} H &= - \sum_i \boldsymbol{\mu}_i \cdot \mathbf{B} \\ &= -g\mu_B \sum_i \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{B} \end{aligned} \quad (۴.۲)$$

که با انتخاب جهت میدان مغناطیسی در راستای محور  $z$  و  $J := g\mu_B$  می‌رسیم به

$$H = -JB \sum_i S_{i,z}. \quad (۵.۲)$$

برای ذرات با اسپین  $S$ ، مقادیر ویژه‌ی  $S_z$  عبارتند از  $m\hbar$  که

$$m = -S, -S + 1, \dots, S - 1, S. \quad (۶.۲)$$

که  $S$  می‌تواند صحیح یا نیمه‌صحیح باشد. تابع پارش تک‌ذره‌ای با تعریف  $x := \beta \hbar JB$  برابر است با

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sum_{m=-S}^S e^{xm} \\ &= e^{-Sx} + \dots + e^{Sx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{Sx} (1 + e^{-Sx} + \dots + e^{-2Sx}) \\
 &= e^{Sx} \cdot \frac{1 - e^{-(2S+1)x}}{1 - e^{-x}} \\
 &= \frac{\sinh(S + 1/2)x}{\sinh x/2}.
 \end{aligned} \tag{۷.۲}$$

و تابع پارش برابر است با

$$Z_N = Z_1^N = \left[ \frac{\sinh(S + 1/2)x}{\sinh x/2} \right]^N. \tag{۸.۲}$$

که در حالتِ خاصِ  $S = 1/2$  تبدیل می‌شود به

$$Z_N = Z_1^N = [2 \cosh x/2]^N. \tag{۹.۲}$$

از این‌جا می‌توانیم مغناطش را به دست آوریم

$$\begin{aligned}
 M &= -\frac{\partial}{\partial B} (-kT \ln Z_N) \\
 &= N \hbar \mathcal{J} \tanh(\beta \mathcal{J} \hbar B/2)
 \end{aligned} \tag{۱۰.۲}$$

و مغناطش بر هر ذره عبارت است از

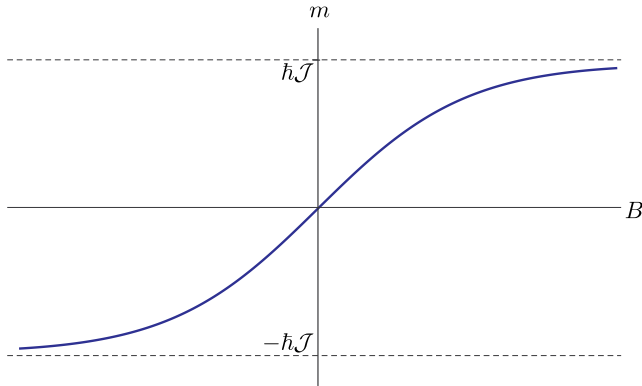
$$m = M/N = \hbar \mathcal{J} \tanh(\beta \mathcal{J} \hbar B/2) \tag{۱۱.۲}$$

در شکل (۲.۲) مغناطش بر حسب میدان مغناطیسی خارجی برای یک سیستم دوحالته را می‌بینید. در حد میدان‌های قوی،  $(\beta \hbar \mathcal{J})^{-1} \gg B$ ، یا دماهای پایین،  $T \ll J \hbar B/k$ ، همه‌ی دو قطبی‌ها در راستای میدان مغناطیسی قرار می‌گیرند و مغناطش به یک حد اشباع می‌رسد. در غیاب میدان خارجی مغناطش صفر می‌شود.

## ۳.۲ تقریب میدان میانگین مدل آیزینگ

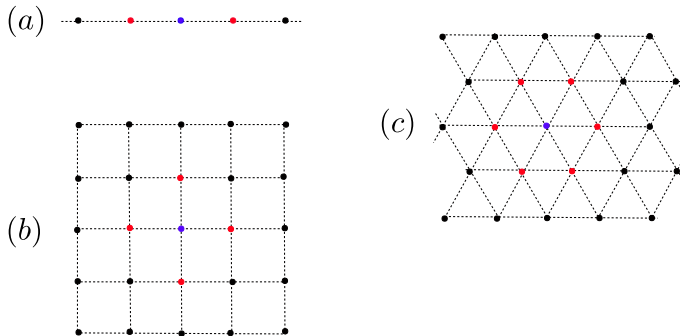
در ابتدا دستگاهی از ذرات بدون برهم‌کنش را در نظر گرفتیم که تنها با میدان مغناطیسی خارجی  $B$  برهم‌کنش داشتند. حالا می‌خواهیم تعمیمی در نظر بگیریم در مورد دستگاهی از





شکل ۲.۲ مغناطش بر حسب میدان مغناطیسی خارجی برای یک سیستم دو حالته.

ذرات که علاوه بر میدان خارجی، ذرات با هم برهم‌کنش دارند. حالتی را در نظر می‌گیریم که هر ذره با  $z$  هم‌سایه برهم‌کنش دارد، مثلاً در یک شبکه‌ی یک‌بُعدی با برهم‌کنش بین نزدیک‌ترین هم‌سایه هر ذره می‌تواند با دو هم‌سایه‌ی مجاورش برهم‌کنش داشته باشد و برای یک شبکه‌ی دوبُعدی مربعی با چهار هم‌سایه‌ی مجاورش و در یک شبکه‌ی مثلثی شش هم‌سایه دارد. شکل (۳.۲) را ببینید. همیلتونی‌ی این دستگاه چیزی است مثل



شکل ۳.۲ هر ذره با  $z$  هم‌سایه برهم‌کنش دارد. در شبکه‌ی یک‌بُعدی هر ذره با دو هم‌سایه‌ی مجاورش برهم‌کنش دارد، حالت (a). جای‌گاهی که انتخاب‌شده را آبی‌رنگ و هم‌سایه‌هایش قرمز رنگ هستند. برای یک شبکه‌ی دوبُعدی مربعی، حالت (b)، هر جای‌گاه چهار هم‌سایه دارد. در حالت (c) برای یک شبکه‌ی دوبُعدی مثلثی هر جای‌گاه شش هم‌سایه دارد.

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j - B \sum_i S_i. \quad (12.2)$$

نماد  $\langle ij \rangle$  یعنی جای‌گاه‌های  $i$  و  $j$  هم‌سایه هستند و هر دو جایگاه هم‌سایه که دو سوی یک رابط هستند، فقط یک‌بار شمرده می‌شوند. ثابت  $J$ ، ثابت جفت‌شدگی<sup>۱</sup> است. برای سیستم دو‌حالتی، اسپین در جای‌گاه  $i$  دو مقدار  $\pm 1$ <sup>۲</sup> را می‌گیرد. این مدل آیزینگ در حضور میدان مغناطیسی خارجی است. مغناطش متوسط

$$\langle S_i \rangle = m_i \quad (13.2)$$

است. اگر فرض کنیم مساله تقارن انتقالی دارد، مثلاً وقتی که اسپین‌ها روی شبکه‌ای دوره‌ای هستند، مغناطش متوسط همه‌ی جای‌گاه‌ها برابر است. یعنی

$$m_i = m. \quad (14.2)$$

برای شبکه‌ی باز یعنی شبکه‌ای که مرز دارد، سیستم دیگر تقارن انتقالی ندارد. البته برای سیستم‌های بزرگ یعنی در حد ترمودینامیکی،  $N \rightarrow \infty$ ، جملات مرزی نسبت به جملات داخل شبکه اهمیتی ندارند و با تقریب خوبی می‌توان فرض کرد که مغناطش متوسط همه‌ی جای‌گاه‌ها برابر است. به دلیل افت و خیز اسپین هر جای‌گاه با مقدار متوسط اسپین در آن جای‌گاه می‌تواند متفاوت باشد.

$$S_i = m + \delta S_i. \quad (15.2)$$

در تقریب میدان میانگین از جمع روی جملات مرتبه‌ی دوم  $\sum_{\langle ij \rangle} \delta S_i \delta S_j$  در همیلتونی چشم‌پوشی می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j &= \sum_{\langle ij \rangle} (m + \delta S_i)(m + \delta S_j) \\ &= \sum_{\langle ij \rangle} [m^2 + m(\delta S_i + \delta S_j) + \delta S_i \delta S_j] \end{aligned}$$

<sup>۱</sup> Coupling constant<sup>۱</sup> برای سادگی ضریب  $\hbar/2$  را در ثابت‌ها و همیلتونی جذب کرده‌ایم.

<https://www.youtube.com/@amiraghamohammadi>

<https://staff.alzahra.ac.ir/aghahammadi>

$$\begin{aligned}
 &\approx \sum_{\langle ij \rangle} [m^2 + m(S_i - \langle S_i \rangle + S_j - \langle S_j \rangle)] \\
 &\approx \sum_{\langle ij \rangle} [m^2 + m(S_i + S_j) - 2m^2] \\
 &\approx \sum_{\langle ij \rangle} [m(S_i + S_j) - m^2] \tag{۱۶.۲}
 \end{aligned}$$

در تقریب میدان میانگین

$$\begin{aligned}
 H &\approx H_{MF} = -J \sum_{\langle ij \rangle} (-m^2 + m(S_i + S_j)) - B \sum_i S_i \\
 H_{MF} &= Jm^2 \frac{Nz}{2} - 2mJ \sum_{\langle ij \rangle} S_i - B \sum_i S_i \\
 H_{MF} &= Jm^2 \frac{Nz}{2} - (B + zJm) \sum_i S_i \tag{۱۷.۲}
 \end{aligned}$$

$N$  در جمله‌ی اول از جمع روی تعداد جای‌گاه‌ها آمده، و ضریب  $z$  به این خاطر است که هر ذره با  $z$  هم‌سایه برهم‌کنش دارد. چون برهم‌کنش عملاً به هر رابط بین دو جای‌گاه نسبت داده می‌شود، برای آن‌که دوباره شماری نشود یک ضریب  $1/2$  هم لازم است. به عبارت دیگر

$$\sum_{\langle ij \rangle} S_i = \sum_{\langle ij \rangle} S_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in n_i=1}^z S_i = \frac{z}{2} \sum_i S_i, \tag{۱۸.۲}$$

$$\sum_{\langle ij \rangle} m^2 = \frac{m^2}{2} Nz. \tag{۱۹.۲}$$

که  $n_i$  شاخص مربوط به جای‌گاه‌های هم‌سایه  $i$  است. در این تقریب هر اسپین به طور موثر میدان مغناطیسی  $B_{eff}$  را می‌بیند

$$B_{eff} = B + zJm. \tag{۲۰.۲}$$

این تقریب را به ترتیب دیگری هم می‌توان گفت. اگر فقط بخشی از همیلتونی که مربوط به اسپین در جای‌گاه  $i$  است را در نظر بگیریم

$$H_i = -S_i(B + J \sum_{j \in n_i} S_j). \tag{۲۱.۲}$$

در تقریب میدان میان‌گین کافی است که اسپین هم‌سایه‌های جای‌گاه  $i$  را با مقدار متوسطشان جای‌گذاری کنیم. در این صورت اسپین  $i$  اُم به طور موثر یک میدان مغناطیسی

$$B_{\text{eff}} = B + zJm$$

را می‌بیند. اگر به جای همیلتونی مدل آیزینگ در حضور میدان مغناطیسی خارجی که یک مدل بس‌ذره‌ای با برهم‌کنش است، تقریب میدان میان‌گین آن را به کار ببریم، تابع پارش

$$\begin{aligned} Z_{N,MF} &= \sum_i e^{-\beta H_{MF}} \\ &= e^{-\beta Jm^2 \frac{Nz}{2}} \left( e^{\beta B_{\text{eff}}} + e^{-\beta B_{\text{eff}}} \right)^N \\ &= 2^N e^{-\beta Jm^2 \frac{Nz}{2}} \cosh^N(\beta B_{\text{eff}}). \end{aligned} \quad (22.2)$$

می‌شود و با استفاده از آن مغناطش کل را می‌توانیم به دست آوریم.

$$\begin{aligned} M &= -\frac{\partial}{\partial B} (-kT \ln Z_N) \\ &= N \tanh(\beta B_{\text{eff}}) \end{aligned} \quad (23.2)$$

از این‌که  $M = Nm$  است، و شرط خودسازگاری این تقریب<sup>۱</sup> می‌رسیم به

$$m = \tanh(\beta(B + zJm)). \quad (24.2)$$

این معادله‌ای برای  $m$  است که با حل آن علی‌الاصول می‌توان  $m$  را به دست آورد. البته این معادله را نمی‌توانیم حل دقیق کنیم. اگر به یک سیستم اسپینی میدان مغناطیسی اعمال کنیم، مغناطیده می‌شود و می‌توان انتظار داشت که مغناطش غیر صفر داشته باشد. اما آیا ممکن است در غیاب میدان مغناطیسی، جواب غیر صفر برای مغناطش وجود داشته باشد؟ در غیاب میدان مغناطیسی می‌رسیم به

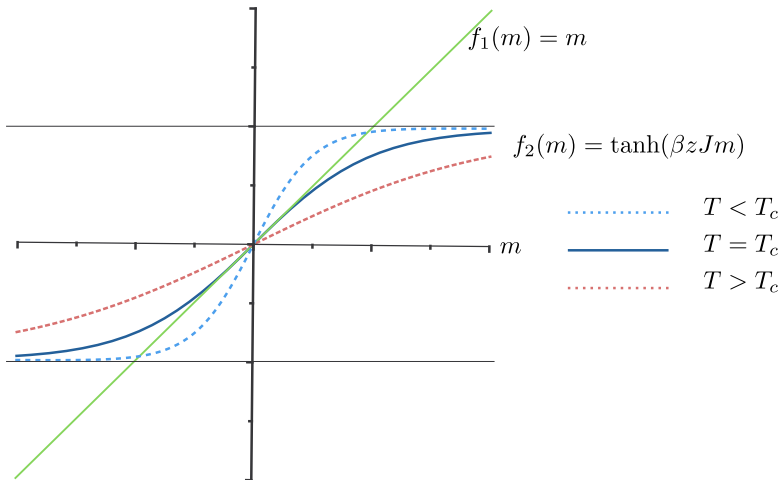
$$m = \tanh(\beta zJm) \quad (25.2)$$

<sup>۱</sup> یعنی همان مقداری که برای مغناطش جاگذاری کرده بودیم از این محاسبه به دست آید.

که یک جواب بدیهی‌اش  $m = 0$  است. برای بررسی وجود جواب‌های غیر صفر برای مغناطش کافی است دو تابع  $f_1(m) = m$  و  $f_2(m) = \tanh(\beta z J m)$  را رسم کنیم و ببینیم که در چند نقطه هم‌دیگر را قطع می‌کنند. شکل (۴.۲) را ببینید. برای بررسی این موضوع کافی است که شیب هر دو تابع را در نزدیکی مبدا به دست آوریم. در حالتی که  $\beta z J < 1$  باشد، یعنی  $T > \frac{zJ}{k}$ ، دو تابع تنها در  $m = 0$  هم‌دیگر را قطع می‌کنند و تنها همین جواب وجود دارد. اگر  $\beta z J > 1$  باشد، یعنی  $T < \frac{zJ}{k}$ ، دو تابع به جز  $m = 0$  در دو نقطه‌ی دیگر هم یک‌دیگر را قطع می‌کنند. بنا براین یک دمای بحرانی

$$\beta_c z J = 1 \quad \Rightarrow \quad T_c = \frac{zJ}{k}, \quad (۲۶.۲)$$

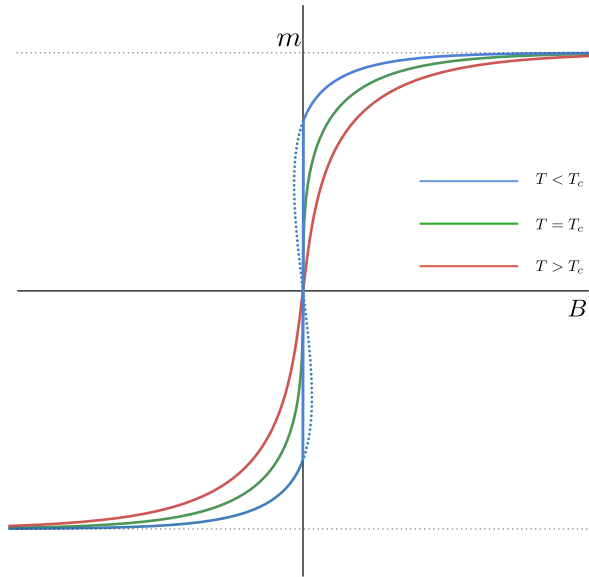
است. همان طوری که می‌بینیم در هر دمایی گذار فاز وجود دارد و اندازه‌ی دمای گذار فاز،  $T_c$ ، به  $z$  و ضریب برهم‌کنش،  $J$ ، بستگی دارد. با حل دقیق مساله در فصل بعد نشان خواهیم داد که



شکل ۴.۲ دو تابع  $f_1(m) = m$  و  $f_2(m) = \tanh(\beta z J m)$  به ازای مقادیر مختلف  $\beta$  که همان عکس دما است، رسم شده‌اند. به ازای دماهای کوچک‌تر از یک دمای بحرانی، سیستم می‌تواند در غیاب میدان مغناطیسی‌ی خارجی هم مغناطش غیر صفر داشته باشد.

این جواب یعنی جوابی که در تقریب میدان میان‌گین به دست آوردیم، در یک بُعد غلط است. اما در دو بُعد هر چند اندازه‌ی دمای گذار فاز با جواب دقیق فرق دارد، ولی گذار فاز وجود دارد.

ابعاد بالاتر یا وقتی که تعداد هم‌سایه‌های برهم‌کنش کننده زیاد شود جواب به‌تر و به جواب دقیق نزدیک‌تر می‌شود.



شکل ۵.۲ منحنی مغناطش  $m$ ، بر حسب میدان مغناطیسی  $h$  به ازای  $T < T_c$ ،  $T = T_c$  و  $T > T_c$ . در حالتی که  $T \geq T_c$  است منحنی مغناطش بر حسب میدان مغناطیسی پیوسته است ولی برای  $T < T_c$  این نمودار ناپیوسته است.

حالا بیایید نماهای بحرانی را در این تقریب به دست آوریم.

$$m = \tanh \left( \frac{Jzm}{kT} + \frac{B}{kT} \right) \quad (27.2)$$

$$m \frac{T_c}{T} + \frac{B}{kT} = \tanh^{-1}(m) \quad (28.2)$$

با استفاده از تقریب

$$\begin{aligned} \tanh^{-1}(m) = f(m) &= f(0) + mf'(0) + \frac{m^2}{2!}f''(0) + \frac{m^3}{3!}f'''(0) + \dots \\ &= 0 + m + \frac{m^3}{3} + \frac{m^5}{5} + \dots \end{aligned}$$

(29.2)

و تعریف  $t$

$$t := \frac{T - T_c}{T_c} = \frac{T}{T_c} - 1 \quad (۳۰.۲)$$

$$\frac{T}{T_c} = 1 + t \quad (۳۱.۲)$$

می‌رسیم به

$$m \frac{T_c}{T} + \frac{B}{kT} = m + \frac{m^3}{3} + \dots \quad (۳۲.۲)$$

$$m \left( \frac{T_c}{T} - 1 \right) + \frac{B}{kT} = \frac{m^3}{3} + \dots \quad (۳۳.۲)$$

که در غیاب میدان مغناطیسی

$$\begin{aligned} \frac{m^3}{3} &= m \left( \frac{T_c}{T} - 1 \right) = m \left( \frac{1}{1+t} - 1 \right) = \frac{-mt}{1+t} \\ &\approx -mt \end{aligned} \quad (۳۴.۲)$$

که برای  $T > T_c$  تنها جواب آن  $m = 0$  است. برای  $T < T_c$  علاوه بر جواب  $m = 0$  جواب‌های دیگری هم داریم

$$m = \pm \sqrt{3 \left[ 1 - \frac{T}{T_c} \right]}. \quad (۳۵.۲)$$

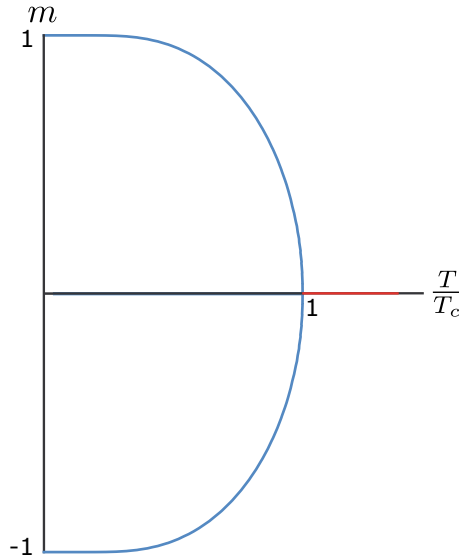
پس

$$\beta = \frac{1}{2}. \quad (۳۶.۲)$$

به طور خلاصه در غیاب میدان مغناطیسی خارجی، معادله مغناطش بر حسب دما،  $m = \tanh\left(\frac{mT_c}{T}\right)$  در دماهای بزرگ‌تر از دمای بحرانی، تنها جواب  $m = 0$  دارد، که در شکل (۶.۲) با رنگ قرمز می‌بینید. در نزدیکی دمای بحرانی  $m \sim (1 - \frac{T}{T_c})^{1/2}$  و در دمای نزدیک صفر  $m = \pm 1$  است و

$$m = \begin{cases} 0, & T > T_c, \\ \pm \sqrt{3 \left[ 1 - \frac{T}{T_c} \right]}, & T \lesssim T_c. \\ \pm 1 & T \approx 0 \end{cases} \quad (۳۷.۲)$$

$$T = T_c \text{ در}$$



شکل ۶.۲ در غیاب میدان مغناطیسی خارجی، معادله‌ی مغناطش بر حسب دما،  $m = \tanh\left(\frac{mT_c}{T}\right)$  در دماهای بزرگ‌تر از دمای بحرانی، تنها جواب  $m = 0$  دارد، که با رنگ قرمز می‌بینید. در نزدیکی دمای بحرانی  $m \sim (1 - \frac{T}{T_c})^{1/2}$  و در دمای نزدیک صفر  $m = \pm 1$  است.

$$B \sim m^3. \quad (۳۸.۲)$$

پس  $\delta = 3$ . با استفاده از روابطی که بین نماهای بحرانی به دست آورده بودیم

$$\gamma = \beta(\delta - 1) = 1 \quad (۳۹.۲)$$

$$\alpha = 2 - \beta(\delta + 1) = 0 \quad (۴۰.۲)$$

این نتایج را مستقیماً نیز می‌توانیم به دست آوریم. مثلاً برای به دست آوردن  $\gamma$  کافی است از تعریف پذیرفتاری مغناطیسی  $\chi = \frac{\partial m}{\partial B}$  استفاده کنیم. برای  $T > T_c$ ،  $m = 0$  است، پس،  $\chi = 0$  برای  $T < T_c$  با مشتق‌گیری از (۳۳.۲) می‌رسیم به

$$\chi\left(\frac{T_c}{T} - 1\right) + \frac{1}{kT} = m^2\chi + \dots \quad (۴۱.۲)$$



$$\chi\left(\frac{T_c}{T} - 1\right) + \frac{1}{kT} = 3\chi\left(1 - \frac{T}{T_c}\right) + \dots \quad (۴۲.۲)$$

$$\chi(1 - t - 1) + \frac{1}{kT} = 3\chi(1 - 1 - t) + \dots \quad (۴۳.۲)$$

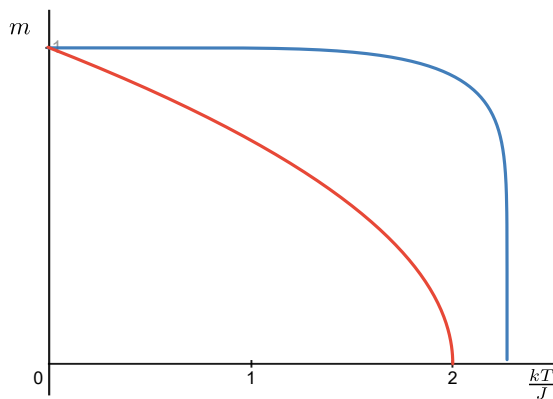
که در این جا از (۳۵.۲) و این که دما در نزدیکی دمای بحرانی است،

$$\frac{T_c}{T} = \frac{1}{1+t} \approx 1 - t \quad (۴۴.۲)$$

استفاده کرده‌ایم. پس

$$\chi \sim \frac{1}{T_c - T} \sim t^{-1}. \quad (۴۵.۲)$$

همان طور که می‌بینیم دمای بحرانی و ضرایب ثابت به  $z$  بستگی دارند، ولی نماهای بحرانی مدل آیزینگ به بُعد و تعداد هم‌سایه‌ها بستگی ندارد، یعنی مهم نیست شبکه مربعی باشد، یا مثلی، دوبعدی باشد یا سه‌بعدی. برای شبکه‌ی مربعی و اسپین دو‌حالتی در تقریب میدان میان‌گین مثلثی،  $\beta = \frac{1}{2}$  و  $T_c = \frac{2J}{k}$  است. با محاسبه‌ی دقیق  $\beta = \frac{1}{8}$  و  $T_c \approx \frac{2.2691 J}{k}$  است. شکل (۷.۲) را ببینید.



شکل ۷.۲ منحنی مغناطش برای شبکه‌ی مربعی و اسپین دو‌حالتی  $m$ ، بر حسب دمای بی‌بُعدشده‌ی  $\frac{kT}{J}$ ، در تقریب میدان میان‌گین (خم قرمز رنگ) و با محاسبه‌ی دقیق (خم آبی رنگ).

## ۴.۲ کمینه کردن انرژی آزاد

در تقریب میدان میان‌گین با کمینه کردن انرژی آزاد هم می‌توانیم اطلاعاتی در مورد گذار فاز به دست آوریم. همیلتونی دستگاه،  $H(s_1, s_2, \dots)$  تابعی از اسپین‌های جای‌گاه‌ها است که در تقریب میدان میان‌گین با توجه به  $S_i = m_i + \delta S_i$  و بسط تیلور آن می‌رسیم به

$$H(s_1, s_2, \dots) \approx H_{\text{MF}} = H_0(m_1, m_2, \dots) + \sum_i \left( \frac{\partial H}{\partial S_i} \right)_{S_i=m_i} \delta S_i,$$

$$H_{\text{MF}} = H_0 + \sum_i \frac{\partial H_0}{\partial m_i} (S_i - m_i). \quad (46.2)$$

که  $H_0$  همان همیلتونی است که همه‌ی اسپین‌ها با همان مقدار میان‌گین‌شان  $m_i$  جاگذاری شده‌اند. توجه دارید که در تقریب میدان میان‌گین از جملات مرتبه‌ی دو و بالاتر  $\delta S_i$  چشم‌پوشی کرده‌ایم. در تقریب میدان میان‌گین

$$m_i = \frac{\sum_{\{S_i\}} S_i e^{-\beta H_{\text{MF}}}}{\sum_{\{S_i\}} e^{-\beta H_{\text{MF}}}}, \quad (47.2)$$

یا

$$\sum_{\{S_i\}} (S_i - m_i) e^{-\beta H_{\text{MF}}} = 0. \quad (48.2)$$

انرژی آزاد هم با رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود

$$e^{-\beta \mathcal{F}_{\text{MF}}} = \sum_{\{S_i\}} e^{-\beta H_{\text{MF}}} \quad (49.2)$$

با مشتق‌گیری نسبت به  $m_k$  از دو طرف جدای (یک ضریب  $-\beta$ ) می‌رسیم به

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial m_k} e^{-\beta \mathcal{F}_{\text{MF}}} = \left( \frac{\partial H_0}{\partial m_k} + \sum_{\{S_i\}} \frac{\partial^2 H_0}{\partial m_k \partial m_i} (S_i - m_i) \frac{\partial H_0}{\partial m_k} \right) e^{-\beta H_{\text{MF}}},$$

$$= \frac{\partial^2 H_0}{\partial m_k \partial m_i} \sum_{\{S_i\}} (S_i - m_i) e^{-\beta H_{MF}}. \quad (50.2)$$

با استفاده از (۴۸.۲) می‌رسیم به

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial m_k} = 0. \quad (51.2)$$

در این صورت در تقریب میدان میان‌گین یک راه دیگر برای بررسی یک دستگاه اسپینی مطالعه نقاط فرینه انرژی آزاد است. به عنوان مثال بیاید همان مسئله‌ی مدل آیزینگ یک‌بعدی در حضور میدان مغناطیسی را با این روش بررسی کنیم. تابع پارش و انرژی آزاد در تقریب میدان میان‌گین عبارت‌اند از

$$H_{MF} = J \frac{Nz}{2} m^2 - (B + zJm) \sum_i S_i$$

$$Z_{MF} = \sum_{\{S_i\}} e^{-\beta H_{MF}} = e^{-\beta \frac{NJz}{2} m^2} \left( \sum_{\{S_i\}} e^{-\beta(B+zJm) \sum_i S_i} \right)$$

$$= e^{-\beta \frac{NJz}{2} m^2} \left[ e^{-\beta(B+zJm)} + e^{\beta(B+zJm)} \right]^N. \quad (52.2)$$

با تعریف  $h := \frac{B}{Jz}$  و  $\theta := \frac{kT}{Jz}$

$$f_{MF} := \frac{-kT \ln Z_{MF}}{NJz}$$

$$= \frac{m^2}{2} - \theta \ln \left[ e^{\frac{m+h}{\theta}} + e^{-\frac{m+h}{\theta}} \right]$$

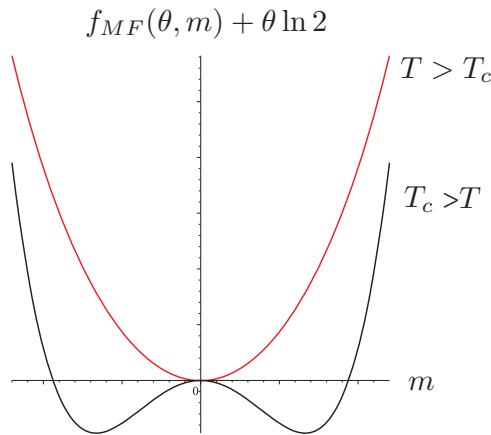
$$= \frac{m^2}{2} - \theta \ln \left[ 2 \cosh\left(\frac{m+h}{\theta}\right) \right]. \quad (53.2)$$

فرینه کردن انرژی آزاد نتیجه می‌دهد

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial m} = 0, \quad \Rightarrow \quad m - \tanh\left(\frac{m+h}{\theta}\right) = 0. \quad (54.2)$$

که همان (۲۴.۲) است. با استفاده از بسط

$$\ln(\cosh u) = \ln \left[ \frac{e^u + e^{-u}}{2} \right]$$



شکل ۸.۲ تابع  $f_{MF}(\theta, m) + \theta \ln 2$  برای دماهای کم‌تر و بیش‌تر از دمای بحرانی بر حسب  $m$  رسم شده است.

$$\begin{aligned}
 &= \ln \left[ 1 + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + \dots \right] \\
 &= \left( \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + \dots \right)^2 + \dots \quad (۵۵.۲)
 \end{aligned}$$

در حد  $B = 0$  می‌رسیم به

$$f_{MF}(\theta, m) = -\theta \ln 2 + \frac{m^2}{2} \left( 1 - \frac{1}{\theta} \right) + \frac{m^4}{12\theta^3} - \frac{m^6}{45\theta^5} + \dots \quad (۵۶.۲)$$

اگر ضریب  $m^2$  در انرژی آزاد مثبت باشد، یعنی  $\theta > 1$  باشد،  $m = 0$  نقطه‌ی کمینه‌ی آن و اگر منفی باشد، یعنی  $\theta < 1$ ،  $m = 0$  نقطه‌ی بیشینه آن است. در حالت اخیر انرژی آزاد به ازای دو مقدار دیگر برای مغناطش کمینه می‌شود. در شکل (۸.۲)،  $f_{MF}(\theta, m) + \theta \ln 2$  بر حسب  $m$  برای دماهای کم‌تر و بیش‌تر از دمای بحرانی رسم شده است.  $\theta_c = 1$  یا  $T_c = \frac{Jz}{k}$  دمای گذار فاز است. با تغییر دما انحنای منحنی تغییر می‌کند به طوری که در دمای  $T_c$  انحنای تغییر علامت می‌دهد و تعداد نقاط اکسترمم از یک به سه تغییر می‌کند. برای به دست آوردن مقادیر مغناطش کافی است که مشتق تابع انرژی آزاد نسبت به  $m$  را برابر با صفر بگیریم. در

این صورت

$$m_0(1 - \frac{1}{\theta}) + \frac{m_0^3}{3\theta^3} + \dots = 0 \quad (۵۷.۲)$$

یکی از جواب‌های این معادله  $m_0 = 0$  و جواب‌های دیگر

$$\begin{aligned} m_0^2 &= 3\theta^2(1 - \theta) + \dots \\ &= -3(1 + t)^2t + \dots \\ &= -3t + \dots \end{aligned} \quad (۵۸.۲)$$

که  $t = \theta - 1$  است.

## ۵.۲ معادله‌ی وِن‌دروالس

گازی تک‌اتمی از ذرات کلاسیک در نظر بگیرید که اتم‌های آن دو به دو با نیرویی مرکزی با هم برهم‌کنش دارند. همیلتونی‌ی این سیستم

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i>j} U(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \quad (۵۹.۲)$$

است. برای پتانسیل دو ذره‌ای توابع مختلفی پیش‌نهاد می‌شود. یکی از آن‌ها پتانسیل لِنارد-جونز<sup>۱</sup> است

$$U(r_{ij}) = 4\epsilon \left[ \left( \frac{\sigma}{r_{ij}} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma}{r_{ij}} \right)^6 \right] \quad (۶۰.۲)$$

گاهی آن را به شکل

$$U(r_{ij}) = \frac{A}{r_{ij}^{12}} - \frac{B}{r_{ij}^6}, \quad (۶۱.۲)$$

هم می‌نویسند، که

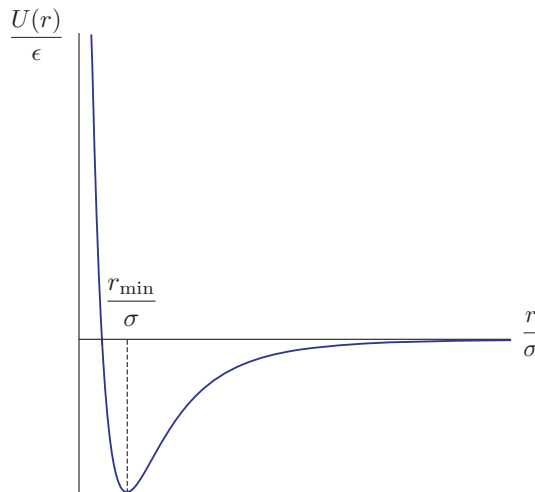
$$A := 4\epsilon\sigma^{12}, \quad B := 4\epsilon\sigma^6 \quad (۶۲.۲)$$

<sup>۱</sup>Lennard-Jones

است. این پتانسیل در  $\sigma 2^{1/6}$  کمینه و  $U_{\min} = -\epsilon$  است. در فاصله‌های نزدیک نیرو دافعه و در دورتر جاذبه است. در فاصله‌های زیاد هم برهم‌کنش ناچیز می‌شود. اما برای محاسبه‌ی تابع پارش، نوشتن پتانسیل هر جفت ذره‌ای کاری سخت و غیرعملی است. کار ساده‌تر این است که برهم‌کنش جفت ذرات را فراموش کنیم و فرض کنیم هر ذره به‌طور میانگین یک پتانسیل موثر را حس می‌کند، که برای فاصله‌های کم دافعه و در فواصل دور برهم‌کنشی نباشد. مثال ساده مدل کره‌ی سخت است، مثل

$$U_{MF}(r) = \begin{cases} +\infty, & r \leq r_0 \\ -\epsilon, & r_0 < r \\ \infty, & L < r. \end{cases} \quad (۶۳.۲)$$

که  $L$  ابعاد ظرف است. به خاطر نیروی دافعه‌ای که روی دیواره به ذرات گاز وارد می‌شوند نمی‌توانند از ظرف خارج شوند. انرژی‌ی  $\epsilon$  هم متناسب با چگالی‌ی ذرات است،  $\epsilon = a \frac{N}{V}$  است. فضای در دسترس هر ذره عملاً  $V - V_0$  است، که  $V_0$ ، برابر حجم کره‌ای به شعاع  $r_0$  است. تابع پارش



شکل ۹.۲ پتانسیل لnard- جونز بر حسب فاصله

$$\begin{aligned}
 Z_N = e^{-\beta H} &= \frac{1}{N!h^{3N}} \left( \int d^3p \int d^3r e^{-\beta \left[ \frac{p^2}{2m} + U(r) \right]} \right)^N \\
 &= \frac{1}{N!h^{3N}} \left( \frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3N/2} \left[ \int_0^\infty d^3r e^{-\beta U(r)} \right]^N \\
 &= \frac{1}{N!h^{3N}} \left( \frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3N/2} \left[ (V - V_0) e^{\beta \epsilon} \right]^N, \quad (۶۴.۲)
 \end{aligned}$$

حجمِ کره‌ای به شعاع  $r_0$  را با  $b$  نمایش می‌دهیم. انرژی آزاد

$$\begin{aligned}
 F &= -kT \ln Z_N \\
 &= kT \ln(h^{3N} N!) - \frac{3NkT}{2} \ln(2\pi m kT) - NkT \ln(V - V_0) - N\epsilon
 \end{aligned}$$

است، که با استفاده از آن می‌توانیم فشار را به دست آوریم

$$\begin{aligned}
 P &= -\frac{\partial F}{\partial V} = \frac{NkT}{V - V_0} + N \frac{\partial \epsilon}{\partial V} \\
 &= \frac{NkT}{V - Nb} - \frac{N^2 a}{V^2} = \frac{kT}{\tilde{v} - b} - \frac{a}{\tilde{v}^2}, \quad (۶۵.۲)
 \end{aligned}$$

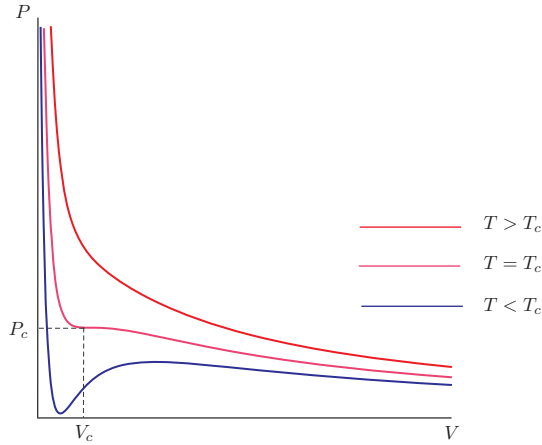
که  $\tilde{v} = V/N$  است. این معادله‌ی وِن‌دِرِوالس<sup>۱</sup> است. معادله‌ی وِن‌دِرِوالس را به شکل زیر هم می‌توان نوشت

$$\tilde{v}^3 - \left(b + \frac{kT}{P}\right)\tilde{v}^2 + \frac{a}{P}\tilde{v} - \frac{ab}{P} = 0. \quad (۶۶.۲)$$

در دماهای ثابت، خم‌های  $P - V$  را می‌توانیم رسم کنیم. شکل (۱۰.۲) را ببینید. به ازای  $T > T_c$  این خم کمینه و بیشینه‌ای ندارد. به ازای  $T < T_c$  این خم یک کمینه و یک بیشینه دارد. در  $T = T_c$  نقاطِ کمینه و بیشینه روی هم می‌افتند. پس

$$\left. \frac{\partial P}{\partial V} \right|_{T_c, V_c} = 0, \quad (۶۷.۲)$$

$$\left. \frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right|_{T_c, V_c} = 0. \quad (۶۸.۲)$$



شکل ۱۰.۲

که نتیجه می‌دهد

$$-\frac{kT_c}{(\tilde{v}_c - b)^2} + \frac{2a}{\tilde{v}_c^3} = 0, \quad (۶۹.۲)$$

$$\frac{2kT_c}{(\tilde{v}_c - b)^3} - \frac{6a}{\tilde{v}_c^4} = 0, \quad (۷۰.۲)$$

$$P_c - \frac{kT_c}{\tilde{v}_c - b} + \frac{a}{\tilde{v}_c^2} = 0. \quad (۷۱.۲)$$

با استفاده از دو رابطه‌ی اول  $\tilde{v}_c$  و با جاگذاری آن در این معادلات

$$V_c = N\tilde{v}_c = 3Nb, \quad T_c = \frac{8a}{27bk}, \quad P_c = \frac{a}{27b^2}, \quad (۷۲.۲)$$

به دست می‌آیند. در دمای بحرانی

$$\frac{P_c V_c}{NkT_c} = \frac{3}{8}, \quad (۷۳.۲)$$

است.



معادله‌ی وِن‌دروالس را با استفاده از

$$\mathcal{P} := \frac{P}{P_c}, \quad (۷۴.۲)$$

$$\mathcal{V} := \frac{V}{V_c}, \quad (۷۵.۲)$$

$$\mathcal{T} := \frac{T}{T_c}, \quad (۷۶.۲)$$

به صورت بی‌بعدشده هم می‌توان در آورد

$$\left(\mathcal{P} + \frac{3}{\mathcal{V}^2}\right)(3\mathcal{V} - 1) = 8\mathcal{T}. \quad (۷۷.۲)$$

پایین‌تر از دمای بحرانی پدیده‌ی عجیبی رخ می‌دهد. همان‌طور که در شکل هم می‌بینیم

$$\frac{\partial P}{\partial V} > 0 \quad (۷۸.۲)$$

است، که نمی‌تواند درست باشد. با زیادشدن فشار حجم هم زیاد می‌شود. در این ناحیه، هم‌زیستی‌ی گاز و مایع رخ می‌دهد و محاسبه‌ی نمای بحرانی را پیچیده‌تر می‌کند. بگذارید نمای بحرانی برای وقتی سیستم در دمای بحرانی است حساب کنیم. برای به دست آوردن نماهای بحرانی فشار، دما و حجم کاهش یافته را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$p := \frac{P}{P_c} - 1, \quad (۷۹.۲)$$

$$v := \frac{V}{V_c} - 1, \quad (۸۰.۲)$$

$$t := \frac{T}{T_c} - 1. \quad (۸۱.۲)$$

با جاگذاری این‌ها در معادله‌ی وِن‌دروالس و فرض این‌که سیستم در دمای بحرانی است، یعنی  $t = 0$  می‌رسیم به

$$\left(1 + p + \frac{3}{(1+v)^2}\right)(3(1+v) - 1) = 8, \quad (۸۲.۲)$$

$$[1 + p + 3(1 - 2v + 3v^2 - 4v^3 + \dots)](2 + 3v) = 8, \quad (۸۳.۲)$$

$$2p + 3v^3 + \dots = 0. \quad (۸۴.۲)$$

پس

$$p \sim v^\delta, \quad \delta = 3. \quad (۸۵.۲)$$

## مسائل

۱.۲ مدل آیزینگ روی شبکه‌ای مثلثی با همیلتونی

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j - B \sum_i S_i$$

در نظر بگیرید.

الف- در هر جای‌گاه  $S_i \in \{-1, +1\}$  است. همیلتونی را در تقریب میدان میان‌گین به دست آورید. برای این کار جای هر اسپین

$$S_i = m + (S_i - m)$$

قرار دهید و جواب خود را تا مرتبه‌ی اول  $S_i - m$  نگه دارید.

ب- تابع پارش و انرژی آزاد را در تقریب میدان میان‌گین به دست آورید.

ج- آیا این سیستم گذار فاز دارد؟

د- همهی موارد بالا برای وقتی اسپین ذرات یک است و  $S_i \in \{-1, 0, +1\}$ ، تکرار کنید.

ه- نماهای بحرانی را به دست آورید.

و- اگر اسپین ذرات  $s$  یعنی  $S_i \in \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\}$  و شبکه با عدد  $z$

یعنی تعداد هم‌سایه‌های هر جای‌گاه  $z$  باشد، نماهای بحرانی چه فرقی می‌کند؟

<https://www.youtube.com/@amiraghamohammadi>

<https://staff.alzahra.ac.ir/aghhamohammadi>

۲.۲ مدل آیزینگ غیریک نواخت با همیلتونی

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} J_{ij} S_i S_j - \sum_i B_i S_i$$

که  $J_{ij}$  ضریب جفت شدگی برای هر رابط بین دو جایگاه  $i$  و  $j$  و  $B_i$  میدان مغناطیسی در جایگاه  $i$  است.

الف- در تقریب میدان میانگین تابع پارش را به دست آورید.

ب- نشان دهید معادلات خودسازگار برای مغناطش در هر جایگاه دسته معادلات جفت شده‌ی زیر است

$$m_i = \tanh \beta \left( \sum_{j \neq i} J_{ij} m_j + B_i \right)$$

۲.۲ روی شبکه‌ای مثلی در هر جایگاه ذراتی با  $S_i \in \{-1, +1\}$  قرار دارند. همیلتونی

$$H = -J \sum_{i,j,k \in \Delta} S_i S_j S_k$$

است، که جمع روی اسپین‌های نزدیک‌ترین هم‌سایه‌ها در هر مثلث، ضریب جفت شدگی  $J > 0$  و دما  $T$  است.

الف- همیلتونی را در تقریب میدان میانگین به دست آورید. برای این کار جای هر اسپین

$$S_i = m + (S_i - m)$$

قرار دهید و جواب خود را تا مرتبه‌ی اول  $S_i - m$  نگه دارید.

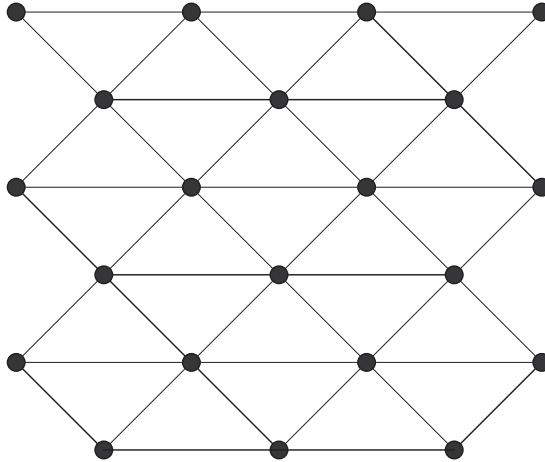
ب- تابع پارش و انرژی آزاد را در تقریب میدان میانگین به دست آورید.

ج- آیا این سیستم گذار فاز دارد؟

۴.۲ مدل بلوم-کیپل<sup>۱</sup> مدلی برای آیزینگ با اسپین ۱ است. همیلتونی این مدل

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j + \Delta \sum_i S_i^2$$

<sup>۱</sup> Blume-Capel

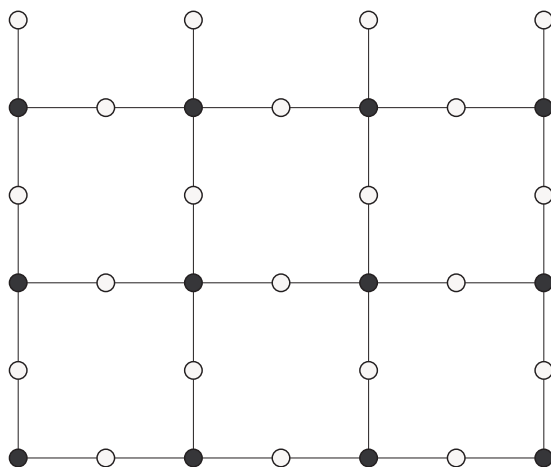


شکل ۱۱.۲ شکل مساله‌ی ۳.۲

است که  $S_i \in \{-1, 0, +1\}$  است. جمع اول روی اسپین‌های هم‌سایه و جمع دوم روی کل شبکه است. نشان دهید به ازای مقادیری از  $\Delta$  مغناطش،  $M$ ، تابعی ناپیوسته از دما،  $T$ ، است. برای این کار از تقریب میدان میانگین استفاده کنید. این کار را برای جمله‌ی اول که شامل برهم‌کنش هر اسپین با اسپین‌های دیگر است انجام دهید. جمله‌ی دوم را چون می‌توان به دقت محاسبه کرد، لازم نیست تقریب بزنید. تابع پارش و انرژی آزاد را بر حسب  $M$  به دست آورید. به ازای مقادیر مختلف  $\Delta$  و  $T$  انرژی آزاد را بر حسب مغناطش رسم کنید. توجه کنید که ضریب  $M^4$  در انرژی آزاد می‌تواند منفی شود.

۵.۲ شبکه‌ای مطابق شکل (شبکه‌ی لی‌یب<sup>۱</sup>) در نظر بگیرید. در این شبکه همه‌ی جایگاه‌ها مثل هم نیستند. بعضی‌ها دو هم‌سایه (نوع  $a$ ) و بعضی چهار هم‌سایه (نوع  $b$ ) دارند. در هر جایگاه یک ذره است که با ذرات هم‌سایه هم برهم‌کنش دارند. برهم‌کنش را هم از نوع مدل آیزینگ بگیرید و فرض کنید  $S_a, S_b \in \{-1, +1\}$ . مغناطش در دو نوع جایگاه را با  $m_a$  و  $m_b$  نمایش دهید. در تقریب میدان میانگین دمای بحرانی،  $T_c$ ، را به دست آورید.

Lattice Lieb<sup>۱</sup>



شکل ۱۲.۲ شکل مساله‌ی ۵.۲

۶.۲ الف - سیستمی اسپینی با همیلتونی

$$H = -B \sum_i \sigma_i$$

در نظر بگیرید. در هر جایگاه  $\sigma_i \in \{-1, +1\}$  است. تابع پارش را به دست آورید.  
ب - همیلتونی

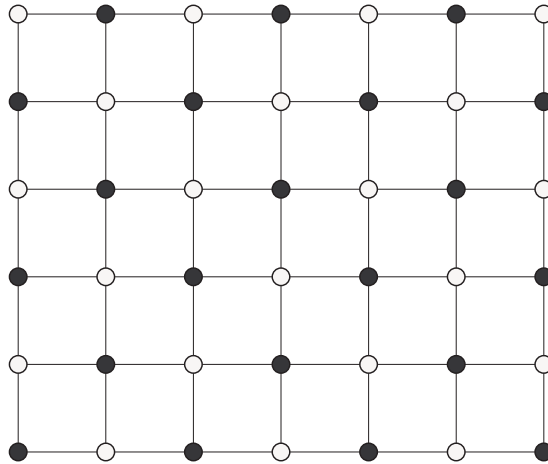
$$H = -B \sum_i S_i$$

و  $S_i \in \{-1, 0, +1\}$  است، تابع پارش را به دست آورید.

ج - شبکه‌ای مربعی و خیلی بزرگ مطابق شکل در نظر بگیرید. همیلتونی سیستم

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i S_j$$

است که دایره‌های توپر متناظر با  $S_i \in \{-1, 0, +1\}$  و دایره‌های توخالی  $\sigma_i \in \{-1, +1\}$  هستند. مغناطش در دو نوع جایگاه را با  $\langle \sigma_i \rangle = m_a$  و  $\langle S_i \rangle = m_b$  نمایش دهید. انرژی آزاد را در تقریب میدان میان‌گین به دست آورید. برای ساده شدن روابط تان  $\theta := kT/(4J)$  بگیرید.



شکل ۱۳.۲ شکل مساله‌ی ۶.۲

د- در همین تقریب دو معادله جفت شده برای  $m_a$  و  $m_b$  به دست آورید. نشان دهید یکی از جواب‌های این معادلات  $m_a = m_b = 0$  است. با بسط دو معادله در مغناطش‌های کوچک تا مرتبه‌ی سوم  $m_a$  و  $m_b$ ، دمای گذار فاز را به دست آورید.

ه- انرژی‌ی آزاد در تقریب میدان میانگین را تا مرتبه‌های  $m_a^4$  و  $m_b^4$  بنویسید. نقاط اکسترم تا این مرتبه را به دست آورید. دمای گذار فاز را به دست آورید.

۷.۲ مدل آیزینگ روی شبکه‌ای نردبانی و دوره‌ای با همیلتونی‌ی

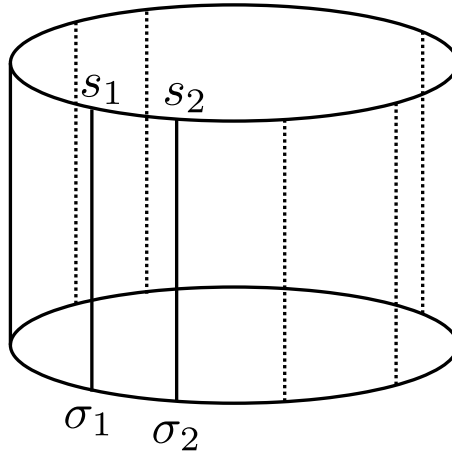
$$H = -J_1 \sum_i s_i s_{i+1} - J_2 \sum_i \sigma_i \sigma_{i+1} - J_3 \sum_i s_i \sigma_i$$

را در نظر بگیرید. روی هر ردیف  $N$  اسپین قرار دارد. فرض کنید هر دو نوع اسپین دو حالت هستند، یعنی  $\sigma_i \in \{-1, +1\}$ ،  $s_i \in \{-1, +1\}$ . همیلتونی را در تقریب میدان میانگین بنویسید.

ب- تابع پارش و انرژی آزاد در تقریب میدان میانگین به دست آورید.

۸.۲ مدل اسپینی کلاسیکی روی شبکه‌ای یک بعدی با همیلتونی‌ی

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - \sum_i \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}_i$$



شکل ۱۴.۲ شکل مساله‌ی ۷.۲

را در نظر بگیرید، که  $B = Bk$  است.  $k$  بردار یکه در راستای محور  $z$  است. الف- در هر جای‌گاه  $S_i$  را برداری با طول ثابت (مثلاً برای سادگی واحد) بگیرید، که در غیاب میدان مغناطیسی در هر جهتی می‌تواند قرار گیرد. جای هر اسپین در جمله‌ی اول

$$S_i = mk + (S_i - mk)$$

قرار دهید و جواب خود را تا مرتبه‌ی اول  $S_i - mk$  نگه دارید. به جمله‌ی دوم دست نزنید. همیلتونی را در تقریب میدان میان‌گین به دست آورید.

راه‌نمایی: در این تقریب همیلتونی شبیه مساله‌ی پارامغناطیس می‌شود.

ب- تابع پارش و انرژی آزاد را در تقریب میدان میان‌گین به دست آورید.

ج- آیا در تقریب میدان میان‌گین این سیستم گذار فاز دارد؟ در تقریب میدان میان‌گین نماهای بحرانی  $\beta$  و  $\delta$  را به دست آورید.





## مدل آیزینگ: حل دقیق

### ۱.۳ مدل آیزینگ: حل دقیق

در فصل قبل با روش میدان میانگین، روشی تقریبی برای حل دسته‌ای از مسائل مکانیک آماری آشنا شدیم. بخش کوچکی از مدل‌های بس‌ذره‌ای در مکانیک آماری را می‌توان حل دقیق کرد. یکی از آن‌ها مدل آیزینگ در یک بعد با برهم‌کنش نزدیک‌ترین همسایه‌گی است. تعمیم‌هایی از این مدل هم کماکان قابل حل هستند. قابل حل بودن در این‌جا به این معنی است که می‌توانیم تابع پارش را محاسبه کنیم. با داشتن تابع پارش می‌توانیم انرژی آزاد و با مشتق‌گیری از آن بعضی از کمیت‌های آماری مثل مغناطش، پذیرفتاری مغناطیسی و ... را محاسبه کنیم. تابع پارش مدل آیزینگ در دو بعد را هم می‌توان به دست آورد.

#### ۱.۱.۳ روش ماتریس انتقال

دستگاهی اسپینی با همیلتونی

$$H = -J \sum_i S_i S_{i+1} \quad (1.3)$$

را در نظر بگیرید. تابع پارش متناظر با این همیلتونی را می‌توان برای  $N$  دل‌خواه محاسبه کرد.

<https://www.youtube.com/@amiraghamohammadi>

<https://staff.alzahra.ac.ir/aghahammadi>

برای سادگی فعلا فرض می‌کنیم شرط مرزی دوره‌ای است.

$$\begin{aligned} Z &= \sum e^{-\beta H} \\ &= \sum_{\{S_i\}} e^{\beta J(S_1 S_2 + S_2 S_3 + \dots + S_N S_1)} \\ &= \sum_{\{S_i\}} T_{S_1 S_2} T_{S_2 S_3} \dots T_{S_N S_1} \end{aligned} \quad (2.3)$$

که

$$T_{S_i S_{i+1}} := e^{\beta J S_i S_{i+1}}. \quad (3.3)$$

در این روش هر جمله از تابع پارش را به حاصل ضرب تعدادی جمله،  $T_{S_i S_{i+1}}$ ، تجزیه می‌کنیم. هر کدام از این جمله‌ها را یک عنصر ماتریسی از ماتریس  $T$  می‌گیریم.

$$\langle S_i | T | S_{i+1} \rangle = T_{S_i S_{i+1}}. \quad (4.3)$$

در این صورت تابع پارش را می‌توانیم به شکل زیر بنویسیم

$$Z = \sum_{\{S_i\}} \langle S_1 | T | S_2 \rangle \langle S_2 | T | S_3 \rangle \dots \langle S_N | T | S_1 \rangle. \quad (5.3)$$

با استفاده از

$$\sum_{S_i} |S_i\rangle \langle S_i| = \mathbb{1} \quad (6.3)$$

اگر در هر جای‌گاه دو حالت ممکن باشد،  $S_i \in \{-1, +1\}$  است.

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (7.3)$$

$$\mathbb{1} = |+\rangle \langle +| + |-\rangle \langle -|, \quad (8.3)$$

$\mathbb{1}$  ماتریس واحد ۲ در ۲ است و

$$T = \begin{pmatrix} e^{\beta J} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta J} \end{pmatrix}. \quad (9.3)$$

با استفاده از این‌ها تابع پارش ساده می‌شود

$$Z = \sum_{S_1} \langle S_1 | \mathbf{T}^N | S_1 \rangle = \text{Tr}(\mathbf{T}^N). \quad (۱۰.۳)$$

رد یک ماتریس مستقل از نمایش آن است، بنا بر این کافی است به جای  $\text{Tr}(\mathbf{T}^N)$  رد نمایش قطری آن را جاگذاری کنیم. پس

$$Z = \text{Tr}(\mathbf{T}^N) = \lambda_1^N + \lambda_2^N = \lambda_1^N \left[ 1 + \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^N \right] \quad (۱۱.۳)$$

$$\approx \lambda_1^N. \quad (۱۲.۳)$$

$\lambda_i$ ها ویژه‌مقادیر  $\mathbf{T}$  و  $\lambda_1$  ویژه‌مقدار بزرگ‌تر ( $\lambda_1 > \lambda_2$ ) است. توجه داریم که چون در مکانیک آماری با  $N$  بزرگ سروکار داریم،

$$\left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^N \approx 0 \quad (۱۳.۳)$$

در این مثال ویژه‌مقادیر

$$\lambda_1 = 2 \cosh(\beta J), \quad (۱۴.۳)$$

$$\lambda_2 = 2 \sinh(\beta J), \quad (۱۵.۳)$$

و تابع پارش و انرژی آزاد عبارت اند از

$$Z = (2 \cosh(\beta J))^N, \quad (۱۶.۳)$$

$$F = -NkT \ln(2 \cosh(\beta J)). \quad (۱۷.۳)$$

حالا بیایید فرض کنیم میدان مغناطیسی خارجی نیز وجود دارد. در این صورت همیلتونی

$$H = -J \sum_i S_i S_{i+1} - B \sum_i S_i \quad (۱۸.۳)$$

است. انتخاب عنصر ماتریس  $T$  یکتا نیست، مثلاً آزادیم که چه بخشی از  $BS_2$  را در  $TS_1S_2$  و چه بخشی را در  $TS_2S_3$  در نظر بگیریم. در واقع یک پارامتر آزاد مثل  $\alpha$  داریم

$$TS_iS_{i+1} = e^{\beta JS_iS_{i+1} + \beta B(\alpha S_1 + (1-\alpha)S_2)}. \quad (۱۹.۳)$$

اگر شرط متقارن بودن را نیز برای انتخاب  $T$  اضافه کنیم،  $\alpha = 1/2$  و نتیجه می شود

$$T = \begin{pmatrix} e^{\beta(J+B)} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta(J-B)} \end{pmatrix}. \quad (۲۰.۳)$$

ویژه مقادیر ماتریس  $T$  عبارت اند از

$$\lambda_1 = e^{\beta J} \left[ \cosh(\beta B) + \sqrt{\sinh^2(\beta B) + e^{-4\beta J}} \right], \quad (۲۱.۳)$$

$$\lambda_2 = e^{\beta J} \left[ \cosh(\beta B) - \sqrt{\sinh^2(\beta B) + e^{-4\beta J}} \right]. \quad (۲۲.۳)$$

با توجه به این که  $\lambda_1 > \lambda_2$  است،

$$Z = \lambda_1^N = \left[ e^{\beta J} \left( \cosh(\beta B) + \sqrt{\sinh^2(\beta B) + e^{-4\beta J}} \right) \right]^N, \quad (۲۳.۳)$$

$$F = -NJ - NkT \ln \left[ \cosh(\beta B) + \sqrt{\sinh^2(\beta B) + e^{-4\beta J}} \right]. \quad (۲۴.۳)$$

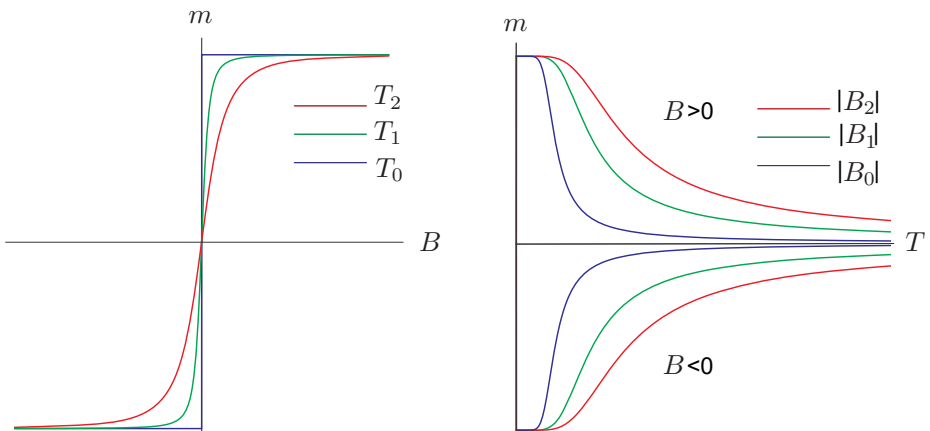
مغناطش متوسط در هر جایگاه

$$\begin{aligned} m &= \frac{M}{N} = \frac{1}{N} \cdot \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta B} \\ &= \frac{\partial \ln \lambda_1}{\partial \beta B} \\ &= \frac{\sinh(\beta B)}{\sqrt{\sinh^2(\beta B) + e^{-4\beta J}}} \end{aligned} \quad (۲۵.۳)$$

دمای گذار فاز  $T_c = 0$  است. این نتیجه‌ی محاسبه‌ی دقیق است و همان طور که می بینیم با نتیجه‌ی میدان میانگین که نتیجه‌ای تقریبی بود نمی خواند.

$$T_{c, MF} = \frac{2J}{k}. \quad (۲۶.۳)$$

در محاسبه‌ی دقیق  $T_c = 0$ ،  $m = \text{sgn}(B)$  است، و در این دما همه‌ی اسپین‌ها در راستای میدان قرار می‌گیرند. اما هر چه دما بالاتر رود، میدان مغناطیسی‌ی قوی‌تری لازم است تا همه‌ی اسپین‌ها در راستای میدان قرار می‌گیرند. این را در شکل هم می‌توان دید. در میدان مغناطیسی‌ی معین هر چه دما بالا رود مغناطش متوسط در هر جایگاه ضعیف‌تر می‌شود. هرچه میدان مغناطیسی ضعیف‌تر باشد، اُفت مغناطش با دما سریع‌تر است.



شکل ۱.۳ مغناطش بر حسب میدان مغناطیسی‌ی خارجی ( $T_0 < T_1 < T_2$ ) و دما ( $0 < B_0 < B_2$ ) است.

**مثال ۱.۱.۳.** در این مثال می‌خواهیم مدل آیزینگ برای ذرات با اسپین 1 به طوری که  $S_i \in \{-1, 0, +1\}$  است، را روی یک شبکه‌ی یک‌بعدی با ضریب جفتش  $J$  را در نظر بگیریم. تعداد جایگاه‌ها  $N$  و شبکه را دوره‌ای می‌گیریم. در ابتدا با استفاده از ماتریس انتقال تابع پارش را در حد ترمودینامیکی، یعنی  $N$  بزرگ به دست می‌آوریم. سپس مغناطش متوسط در هر جایگاه  $\langle S_i \rangle$  را به دست می‌آوریم. در حد ترمودینامیکی، یعنی  $N$  بزرگ به سادگی می‌توانیم  $\langle S_i S_{i+1} \rangle$

را به دست آوریم. همیلتونی مدل آیزینگ

$$H = -J \sum_i S_i S_{i+1} \quad (۲۷.۳)$$

است. با تعریف

$$T_{S_i S_{i+1}} = e^{\beta J S_i S_{i+1}}. \quad (۲۸.۳)$$

در این روش هر جمله از تابع پارش را به حاصل ضرب تعدادی جمله،  $T_{S_i S_{i+1}}$ ، تجزیه می‌کنیم. هر کدام از این جمله‌ها را یک عنصر ماتریسی از ماتریس  $3 \times 3$  می‌گیریم. در این صورت تابع پارش برای شرط مرزی دوره‌ای را می‌توانیم به شکل زیر بنویسیم

$$Z = \sum_{\{S_i\}} \langle S_1 | \mathbf{T} | S_2 \rangle \langle S_2 | \mathbf{T} | S_3 \rangle \cdots \langle S_n | \mathbf{T} | S_1 \rangle. \quad (۲۹.۳)$$

با توجه به این‌که  $S_i \in \{-1, 0, +1\}$  است، سه بردار پایه لازم است که بردارهای زیر را انتخاب می‌کنیم

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (۳۰.۳)$$

در این پایه‌ها می‌توانیم عناصر ماتریس انتقال را به دست آوریم، مثلاً با استفاده از (۲۸.۳)

$$T_{++} = e^{\beta J (+1)(+1)} = e^{\beta J},$$

$$T_{+-} = e^{\beta J (+1)(-1)} = e^{-\beta J},$$

$$T_{+0} = e^{\beta J (+1)(0)} = 1.$$

بنا بر این در این پایه‌ها ماتریس انتقال

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} e^{\beta J} & e^{-\beta J} & 1 \\ e^{-\beta J} & e^{\beta J} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (۳۱.۳)$$

است. برای آنکه ویژه مقادیر این ماتریس را به دست آوریم باید یک ماتریس  $3 \times 3$  را قطری کنیم که نیاز به حل یک معادله‌ی درجه ۳ دارد. اما در این مورد راه ساده‌تر حدسی برای جواب است. حدس ویژه مقدار که ساده نیست ولی در مورد ویژه تابع‌ها می‌توان حدسی زد. ویژه تابع‌های بلوک

$$T = \begin{pmatrix} e^{\beta J} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta J} \end{pmatrix} \quad (۳۲.۳)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (۳۳.۳)$$

هستند. حدس‌های زیر را به عنوان ویژه تابع  $T$  در نظر بگیرید

$$|u_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ u_1 \end{pmatrix}, \quad |u_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (۳۴.۳)$$

با استفاده از معادله‌ی ویژه برداری - ویژه مقداری

$$T|u_i\rangle = \lambda_i|u_i\rangle, \quad (۳۵.۳)$$

می‌توان ویژه بردارها و ویژه مقدارها را به دست آورد. مثلاً به راحتی می‌توان نشان داد،  $u_1 = 0$  است و  $|u_1\rangle$  ویژه بردار  $T$  با ویژه مقدار  $e^{\beta J} - e^{-\beta J}$  است. به همین ترتیب می‌توانید دو ویژه مقدار دیگر را نیز به دست آورید. ویژه مقادیر این ماتریس

$$\lambda_0 = 2 \sinh(\beta J), \quad (۳۶.۳)$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left[ 1 + 2 \cosh(\beta J) \pm \sqrt{4 \cosh^2(\beta J) - 4 \cosh(\beta J) + 9} \right], \quad (۳۷.۳)$$

واضح است که  $\lambda_+ > \lambda_-$ ، اما واضح نیست بین دو ویژه مقدار دیگر کدام بزرگ‌تر است. با استفاده از این که

$$\sqrt{4 \cosh^2(\beta J) - 4 \cosh(\beta J) + 9} = \sqrt{[2 \cosh(\beta J) - 1]^2 + 8} > 2 \cosh(\beta J) - 1.$$

پس

$$\lambda_+ > 2 \cosh(\beta J) > \lambda_0. \quad (۳۸.۳)$$

بنا بر این بزرگ‌ترین ویژه‌مقدار  $\lambda_+$  است و در حد ترمودینامیکی، یعنی  $N$  بزرگ

$$Z = \lambda_-^N + \lambda_0^N + \lambda_+^N = \lambda_+^N \left[ 1 + \left( \frac{\lambda_0}{\lambda_+} \right)^N + \left( \frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^N \right] \approx \lambda_+^N, \quad (۳۹.۳)$$

$$F \approx -NkT \ln \lambda_+. \quad (۴۰.۳)$$

چون سیستم تقارن انتقالی دارد

$$\begin{aligned} \langle S_i S_{i+1} \rangle &= \langle S_1 S_2 \rangle = \langle S_2 S_3 \rangle = \dots = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \langle S_j S_{j+1} \rangle = \frac{1}{N} \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta J} = \frac{\partial \ln \lambda_+}{\partial \beta J} \\ &= \frac{2 \sinh(\beta J)}{\sqrt{4 \cosh^2(\beta J) - 4 \cosh(\beta J) + 9}} \\ &\quad \times \frac{\sqrt{4 \cosh^2(\beta J) - 4 \cosh(\beta J) + 9} + 2 \cosh(\beta J) - 1}{\sqrt{4 \cosh^2(\beta J) - 4 \cosh(\beta J) + 9} + 2 \cosh(\beta J) + 1} \end{aligned}$$

رفتار حدی این تابع در دماهای بالا و دماهای پایین به صورت زیر است.

$$\langle S_i S_{i+1} \rangle = \begin{cases} \frac{4\beta J}{9}, & \beta \rightarrow 0 \\ \tanh(\beta J), & \beta \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (۴۱.۳)$$

یعنی اسپین‌های مجاور در دمای کم بسیار هم‌بسته و در دماهای بالا ناهم‌بسته هستند.

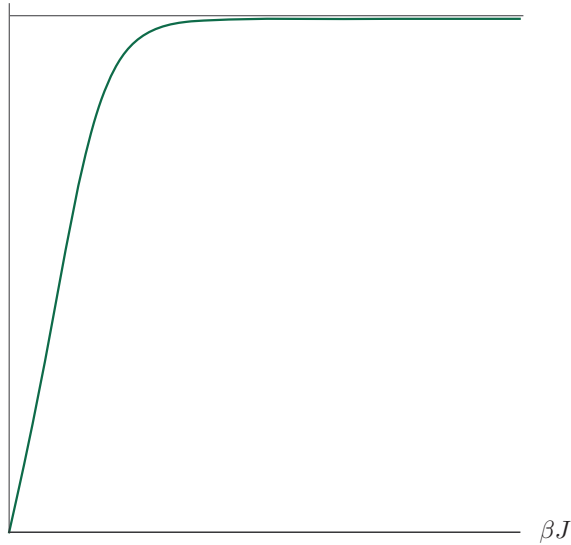
## ۲.۳ توابع هم‌بستگی

قبلاً هم در مورد توابع هم‌بستگی و مقادیر متوسط صحبت کردیم، اما حالا می‌خواهیم روش‌هایی سیستماتیک برای محاسبه آن‌ها را معرفی کنیم. اسپین متوسط برای مدلی با همیلتونی  $H_0$  از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\langle S_i \rangle = \frac{\sum S_i e^{-\beta H_0}}{\sum e^{-\beta H_0}}. \quad (۴۲.۳)$$



$$\langle S_i S_{i+1} \rangle$$



شکل ۲.۳ تابع هم‌بستگی  $\langle S_i S_{i+1} \rangle$  بر حسب  $\beta J$ .

راه عمومی برای محاسبه‌ی توابع هم‌بستگی اضافه کردن میدان خارجی به سیستم است، مثلاً جمله‌ای مثل  $-B_i S_i$  به همیلتونی اضافه کنیم، تابع پارش به

$$e^{-\beta H_0} \rightarrow e^{-\beta(H_0 - B_i S_i)} \quad (۴۳.۳)$$

تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned} \langle S_i \rangle &= \frac{\sum S_i e^{-\beta H_0}}{\sum e^{-\beta H_0}} = \frac{1}{Z_0} \lim_{B_i \rightarrow 0} \sum S_i e^{-\beta(H_0 - B_i S_i)} \\ &= \frac{1}{Z_0} \lim_{B_i \rightarrow 0} \frac{\partial Z}{\partial(\beta B_i)} = \lim_{B_i \rightarrow 0} \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial(\beta B_i)} \\ &= \lim_{B_i \rightarrow 0} \frac{\partial \ln Z}{\partial(\beta B_i)}. \end{aligned} \quad (۴۴.۳)$$

که  $Z_0$  تابع پارش با چشمه‌ی اضافه شده است. توابع چندنقطه‌ای هم به همین صورت به دست

می‌آیند. برای هر جمله در تابع چندنقطه‌ای اصطلاحاً باید یک جمله‌ی چشمه به همیلتونی اضافه کرد. مثلاً برای تابع دو نقطه‌ای  $\langle S_i S_j \rangle$  باید به همیلتونی دو جمله اضافه کنیم

$$H = H_0 - B_i S_i - B_j S_j, \quad (۴۵.۳)$$

و تابع دو نقطه‌ای‌ی عبارت است از

$$\langle S_i S_j \rangle = \lim_{B_i \rightarrow 0} \lim_{B_j \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial(\beta B_i) \partial(\beta B_i)} \right]. \quad (۴۶.۳)$$

به همین شکل می‌توان همه‌ی توابع چند نقطه‌ای را محاسبه کرد. هم بستگی‌ی آفت‌وخیزهای اسپین در دو جای‌گاه  $i$  و  $j$  عبارت است از

$$\begin{aligned} \langle \delta S_i \delta S_j \rangle &= \langle (S_i - \langle S_i \rangle)(S_j - \langle S_j \rangle) \rangle \\ &= \langle S_i S_j \rangle - \langle \langle S_i \rangle S_j \rangle - \langle S_i \langle S_j \rangle \rangle + \langle \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle \rangle \\ &= \langle S_i S_j \rangle - \langle S_j \rangle \langle S_i \rangle \\ &= \lim_{B_i \rightarrow 0} \lim_{B_j \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial(\beta B_i) \partial(\beta B_i)} - \frac{1}{Z^2} \frac{\partial Z}{\partial(\beta B_i)} \frac{\partial Z}{\partial(\beta B_j)} \right] \\ &= \lim_{B_i \rightarrow 0} \lim_{B_j \rightarrow 0} \frac{\partial \langle S_i \rangle}{\partial(\beta B_j)} \\ &= kT \chi_{ij} \end{aligned} \quad (۴۷.۳)$$

که

$$\chi_{ij} := \frac{\partial \langle S_i \rangle}{\partial B_j} \quad (۴۸.۳)$$

پاسخ اسپین  $i$  ام به تغییرات میدان مغناطیسی در جای‌گاه  $j$  است. یعنی اگر میدان مغناطیسی در جای‌گاه  $j$  ام را تغییر دهیم متوسط اسپین در جای‌گاه  $i$  چه قدر تغییر می‌کند. عنصر قطری  $\chi_{ij}$  پذیرفتاری مغناطیسی در جای‌گاه  $j$  است.

گاهی راه‌های ساده‌تری هم برای محاسبه‌ی توابع هم‌بستگی وجود دارد، مثلاً بیایید حالتی را در نظر بگیریم که زنجیره‌ای یک‌بعدی از اسپین با ضریب جفتش غیر یک‌نواخت  $J_k$  داریم. تعداد

جایگاه‌ها  $N$  و شبکه را دوره‌ای بگیرید. هر چند با غیریک‌نواخت گرفتن ضریب جفتش، تقارن انتقالی را از دست داده‌ایم، اما هنوز تابع پارش را برای  $N$  دل‌خواه به سادگی می‌توان محاسبه کرد. همیلتونی مدل آیزینگ روی یک شبکه‌ی یک‌بعدی با ضریب جفتش غیریک‌نواخت  $J_k$

$$H = - \sum_k J_k S_k S_{k+1} \quad (۴۹.۳)$$

است. تابع پارش متناظر با این همیلتونی را می‌توان برای  $N$  دل‌خواه با شرط مرزی دوره‌ای

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\{S_i\}} e^{\beta(J_1 S_1 S_2 + J_2 S_2 S_3 + \dots + J_N S_N S_1)} \\ &= \sum_{\{S_i\}} \mathbf{T}_{S_1 S_2}^{(J_1)} \mathbf{T}_{S_2 S_3}^{(J_2)} \dots \mathbf{T}_{S_N S_1}^{(J_N)} \end{aligned} \quad (۵۰.۳)$$

است، که

$$\mathbf{T}_{S_i S_{i+1}}^{(J_i)} = e^{\beta J_i S_i S_{i+1}}. \quad (۵۱.۳)$$

در این صورت تابع پارش را می‌توانیم به شکل زیر بنویسیم

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\{S_i\}} \langle S_1 | \mathbf{T}^{(J_1)} | S_2 \rangle \langle S_2 | \mathbf{T}^{(J_2)} | S_3 \rangle \dots \langle S_n | \mathbf{T}^{(J_N)} | S_1 \rangle \\ &= \text{Tr}(\mathbf{T}^{(J_1)} \mathbf{T}^{(J_2)} \dots \mathbf{T}^{(J_N)}). \end{aligned} \quad (۵۲.۳)$$

با استفاده از

$$\sum_{S_i} |S_i\rangle \langle S_i| = \mathbb{1} \quad (۵۳.۳)$$

اگر  $S_i \in \{-1, +1\}$  باشد،

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (۵۴.۳)$$

$\mathbb{1}$  ماتریس واحد  $۲$  در  $۲$  است و

$$\mathbf{T}^{(J_k)} = \begin{pmatrix} e^{\beta J_k} & e^{-\beta J_k} \\ e^{-\beta J_k} & e^{\beta J_k} \end{pmatrix}. \quad (۵۵.۳)$$

نکته‌ی جالب این است که همه‌ی این ماتریس‌ها با هم جابه‌جایی هستند، بنا بر این می‌توان هم‌زمان آن‌ها با هم قطری کرد. در این صورت ماتریس قطری‌کننده‌ی این ماتریس مستقل از  $J_k$  است. بنا بر این به ازای همه‌ی  $k$  ها با یک ماتریس یک‌سان می‌توان همه‌شان را قطری کرد:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (۵۶.۳)$$

$$T_D := UT^{(J_k)}U^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(k)} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{(k)} \end{pmatrix}. \quad (۵۷.۳)$$

$\lambda_{1,2}^{(k)}$  ویژه‌مقادیر  $T^{(J_k)}$  هستند.

$$\lambda_1^{(k)} = 2 \cosh(\beta J_k), \quad (۵۸.۳)$$

$$\lambda_2^{(k)} = 2 \sinh(\beta J_k), \quad (۵۹.۳)$$

و تابع پارش در حد  $N$  بزرگ عبارت است از

$$Z = \prod_{k=1}^N 2^N \cosh(\beta J_k). \quad (۶۰.۳)$$

این ایده‌ی غیریک‌نواخت بودن ضریب جفتش این امکان را می‌دهد که بتوان توابع هم‌بستگی را محاسبه کرد. در حد ترمودینامیکی، یعنی  $N$  بزرگ  $\langle S_i S_{i+1} \rangle$  عبارت است از

$$\begin{aligned} \langle S_i S_{i+1} \rangle &= \frac{\sum S_i S_{i+1} e^{-\beta H}}{\sum e^{-\beta H}} \\ &= \frac{\sum S_i S_{i+1} e^{\beta \sum_k J_k S_k S_{k+1}}}{Z} \\ &= \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial (\beta J_i)} \\ &= \tanh(\beta J_i). \end{aligned} \quad (۶۱.۳)$$

با تکرار مشتق‌گیری می‌توان توابع هم‌بستگی‌ی دیگری مثل  $\langle S_i S_{i+j} \rangle$  را هم محاسبه کرد. مثلاً

$$\langle S_i S_{i+2} \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial (\beta J_i) \partial (\beta J_{i+1})}$$

$$= \tanh(\beta J_i) \tanh(\beta J_{i+1}). \quad (۶۲.۳)$$

و

$$\begin{aligned} \langle S_i S_{i+j} \rangle &= \frac{1}{Z} \frac{\partial^j Z}{\partial(\beta J_i) \partial(\beta J_{i+1}) \cdots \partial(\beta J_{i+j-1})} \\ &= \prod_{k=0}^{j-1} \tanh(\beta J_{i+k}). \end{aligned} \quad (۶۳.۳)$$

برای حالتی که ضریب جفتش یک‌نواخت است، هم می‌توانیم با همین تکنیک ابتدا فرض کنیم ضریب جفتش غیریک‌نواخت است و در انتها همه‌ی ضرایب جفتش را برابر بگیریم. در این صورت برای چنان سیستمی با استفاده از همین نتیجه‌ای که به دست آوریم توابع هم‌بستگی عبارت هستند از

$$\langle S_i S_j \rangle = \tanh(\beta J)^{|j-i|}. \quad (۶۴.۳)$$

این نتایج را با استفاده از روش ماتریس انتقال هم می‌توانیم به دست آوریم. مثلاً مغناطش متوسط

$$\begin{aligned} \langle S_i \rangle &= \frac{\sum_{\{S_k\}} S_i \langle S_1 | \mathbf{T} | S_2 \rangle \langle S_2 | \mathbf{T} | S_3 \rangle \cdots \langle S_n | \mathbf{T} | S_1 \rangle}{\text{Tr}(\mathbf{T}^N)} \\ &= \frac{\sum_{\{S_k\}} \langle S_1 | \mathbf{T} | S_2 \rangle \cdots \langle S_{i-1} | \mathbf{T} \mathbf{S} | S_i \rangle \cdots \langle S_n | \mathbf{T} | S_1 \rangle}{\text{Tr}(\mathbf{T}^N)} \\ &= \frac{\text{Tr}(\mathbf{T}^{i-1} \mathbf{S} \mathbf{T}^{N-i+1})}{\text{Tr}(\mathbf{T}^N)} = \frac{\text{Tr}(\mathbf{S} \mathbf{T}^N)}{\text{Tr}(\mathbf{T}^N)} \\ &= \frac{\text{Tr}(\mathbf{S} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{T}_D^N \mathbf{U})}{\text{Tr}(\mathbf{T}^N)} = \frac{\text{Tr}(\mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{T}_D^N)}{\text{Tr}(\mathbf{T}^N)} \end{aligned} \quad (۶۵.۳)$$

که

$$\mathbf{S} | S_i \rangle = S_i | S_i \rangle \quad (۶۶.۳)$$

است، در پایه‌ی (۵۴.۳) همان

$$\mathbf{S} = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (۶۷.۳)$$

است. به عنوان مثال مدل آیزینگ در غیاب میدان مغناطیسی را در نظر بگیرید. با استفاده از (۵۶.۳) نتیجه می‌شود

$$USU^{-1} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (۶۸.۳)$$

با ضرب این ماتریس در هر ماتریس قطری نتیجه یک ماتریس غیر قطری است که ردش صفر است. پس

$$\text{Tr}(USU^{-1}T_D^N) = 0 \Rightarrow \langle S_i \rangle = 0, \quad (۶۹.۳)$$

و این با انتظار ما که برای مدل آیزینگ در غیاب میدان مغناطیسی  $\langle S_i \rangle = 0$  است سازگار است. در حضور میدان مغناطیسی  $T$  و ماتریس قطری‌کننده‌ی آن  $U$  عوض می‌شود و مغناطش میان‌گین دیگر صفر نیست.

توابع دونقطه‌ای را هم با همین روش می‌توان به دست آورد

$$\begin{aligned} \langle S_i S_{i+j} \rangle &= \frac{\sum_{\{S_k\}} S_i S_{i+j} \langle S_1 | T | S_2 \rangle \langle S_2 | T | S_3 \rangle \cdots \langle S_n | T | S_1 \rangle}{\text{Tr}(T^N)} \\ &= \frac{\text{Tr}(T^{i-1} S T^j S T^{N-i-j+1})}{\text{Tr}(T^N)} \\ &= \frac{\text{Tr}(S T^j S T^{N-j})}{\text{Tr}(T^N)}, \end{aligned} \quad (۷۰.۳)$$

اما حالا بیایید ببینیم معنای این توابع هم‌بستگی چیست؟ از  $\langle S_i \rangle$  شروع کنیم. این کمیت متوسط اسپین در جای‌گاه  $i$  است. آیا این کمیت را (مثلاً برای سیستم دوحالته) می‌توان برحسب احتمال مثبت بودن اسپین جای‌گاه  $i$ ،  $P_i^+$  و احتمال منفی بودن اسپین جای‌گاه  $j$ ،  $P_j^-$  هم می‌توان نوشت؟

$$\begin{aligned} \langle S_i \rangle &= P_i^+ \times (+1) + P_i^- \times (-1) \\ &= P_i^+ - P_i^-. \end{aligned} \quad (۷۱.۳)$$

اما از طرف دیگر

$$P_i^+ + P_i^- = 1. \quad (۷۲.۳)$$

پس

$$\begin{aligned} P_i^+ &= \frac{1}{2}(1 + \langle S_i \rangle) \\ P_i^- &= \frac{1}{2}(1 - \langle S_i \rangle). \end{aligned} \quad (۷۳.۳)$$

تابع دونقطه‌ای  $\langle S_i S_j \rangle$  متوسط حاصلضرب اسپین دو جای‌گاه  $i$  و  $j$  است که می‌توان آن را برحسب احتمال این‌که اسپین این جای‌گاه‌ها مقادیر مختلف باشند هم نوشت،

$$\langle S_i S_j \rangle = P_{i,j}^{++} - (P_{i,j}^{+-} + P_{i,j}^{-+}) + P_{i,j}^{--}, \quad (۷۴.۳)$$

که مثلاً  $P_{i,j}^{+-}$  احتمال آن است که اسپین جای‌گاه  $i$  مثبت و اسپین جای‌گاه  $j$  منفی باشد. عمل‌گر

$$\mathbf{n} := \frac{1}{2}(1 + \mathbf{S}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (۷۵.۳)$$

را در نظر بگیرید. ویژه‌مقادیر عمل‌گر  $\mathbf{S}$ ،  $\pm 1$  و ویژه‌مقادیر عمل‌گر  $\mathbf{n}$ ،  $1$  و  $0$  هستند. اگر  $S_i = +1(-1)$  باشد  $n_i = 1(0)$  است. در این صورت توابع چند نقطه‌ای عمل‌گر  $\mathbf{n}$  رابطه‌ی ساده‌تری با احتمال دارند

$$\begin{aligned} \langle n_i \rangle &= P_i^+ \times (1) + P_i^- \times (0) \\ &= P_i^+, \end{aligned} \quad (۷۶.۳)$$

و

$$\langle n_i n_j \rangle = P_{i,j}^{++}, \quad (۷۷.۳)$$

و  $\langle n_i n_j \dots n_k \rangle$  احتمال آن است که اسپین جای‌گاه‌های  $i, j, \dots, k$  مثبت باشد.

### ۳.۳ مدل آیزینگ روی یک زنجیره‌ی یک‌بُعدی با شرطِ مرزیِ غیر دوره‌ای

در بخش‌های قبیل مدل آیزینگ روی یک زنجیره‌ی یک‌بُعدی با شرطِ مرزیِ دوره‌ای را بررسی کردیم. در حدِ ترمودینامیک که تعدادِ جای‌گاه‌ها زیاد است، جز کمیت‌هایی که به مرز مربوط هستند، مثلاً مغناطش یا توابعِ هم‌بستگی‌ی اسپین‌ها برای جای‌گاه‌هایِ نزدیکِ مرز، جواب‌هایمان مستقل از انتخابِ شرطِ مرزی است. ولی برای کامل بودنِ بحث و هم این‌که اگر علاقه‌مند باشیم جواب‌هایمان در نزدیکیِ مرز را بررسی کنیم در این بخش زنجیره‌ای یک‌بُعدی با شرطِ مرزیِ غیر دوره‌ای را در نظر می‌گیریم. در این صورت برای مدل آیزینگ روی یک زنجیره‌ی یک‌بُعدی از اسپین

$$H = -J \sum_i S_i S_{i+1} - B \sum_i S_i \quad (۷۸.۳)$$

تابعِ پارش برای وقتی که اسپینِ جای‌گاهِ اول و آخر معین باشد عبارت است از

$$\begin{aligned} Z &= \sum e^{-\beta H} \\ &= \sum_{S_2, \dots, S_{N-1}} e^{-\beta(H_{12} + H_{23} + \dots + H_{N-1, N})} \\ &= \sum_{\{S_i\}} T_{S_1 S_2} T_{S_2 S_3} \dots T_{S_{N-1} S_N} \\ &= \langle S_1 | \mathbf{T}^{N-1} | S_N \rangle. \end{aligned} \quad (۷۹.۳)$$

که

$$H_{i, i+1} := -J S_i S_{i+1} - B S_i \quad (۸۰.۳)$$

$\mathbf{T}$  همان ماتریس انتقال (۲۰.۳) است. تنها تفاوت در شرطِ مرزی است. توجه دارید که در این‌جا فرض کرده‌ایم که اسپین‌هایِ جای‌گاه‌هایِ اول و آخر معین هستند و روی آن‌ها جمع نبسته‌ایم. اگر شرطِ مرزی مثلاً این باشد که اسپین در مرزها در حالتِ  $+$  است، می‌رسیم به

$$Z = \langle + | \mathbf{T}^{N-1} | + \rangle. \quad (۸۱.۳)$$



اگر آنها هم معین نباشند و بتوانند تغییر کنند تابع پارش که در حالتی که شرایط مرزی دوره‌ای بود به ردّ یک ماتریس بود، تبدیل می‌شود به

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{S_1, S_N} \langle S_1 | \mathbf{T}^{N-1} | S_N \rangle \\ &= \langle + | \mathbf{T}^{N-1} | + \rangle + \langle - | \mathbf{T}^{N-1} | + \rangle \\ &\quad \langle + | \mathbf{T}^{N-1} | - \rangle + \langle - | \mathbf{T}^{N-1} | - \rangle \end{aligned} \quad (۸۲.۳)$$

## مسائل

۱.۳ الف- مغناطش میان‌گین در هر جای‌گاه برای مدل آیزینگ از ذرات به طوری که  $S_i \in \{-1, +1\}$  است، و ضرایب جفت‌شدگی غیر یک‌نواخت و شبکه یک‌بعدی و دوره‌ای است و با همیلتونی  $(۴۹.۳)$  داده می‌شود، را به دست آورید.  
ب- ضرایب جفت‌شدگی را یک‌نواخت بگیرید. با استفاده از  $(۷۰.۳)$ ،  $\langle S_i S_{i+2} \rangle$  را به دست آورید.

ج- فرض کنید میدان مغناطیسی  $i$  یک‌نواختی هم وجود دارد. مغناطش میان‌گین را به دست آورید.

۲.۳ الف- مدل آیزینگ از ذرات با برهم‌کنش نزدیک‌ترین هم‌سایه روی شبکه‌ای یک‌بعدی به طوری که  $S_i \in \{-1, +1\}$  است، و ضرایب جفت‌شدگی یک‌نواخت و شبکه دوره‌ای است را در نظر بگیرید. فرض کنید میدان مغناطیسی  $i$  کاملاً غیر یک‌نواخت است. نشان دهید با روش معمول نمی‌توانید تابع پارش را محاسبه کنید.

ب- حالا فرض کنید میدان مغناطیسی  $i$  تا حدی غیر یک‌نواخت است یعنی میدان روی جای‌گاه‌های زوج  $B_0$  و روی جای‌گاه‌های فرد  $-B_0$  است. حالا تابع پارش را به دست آورید. مغناطش میان‌گین در جای‌گاه‌های زوج و فرد را به دست آورید.

۳.۳ مدلی با همیلتونی  $i$

$$H = -J \sum_i S_i S_{i+1} \quad (۸۳.۳)$$

برای ذرات با اسپین ۲ به طوری که  $S_i \in \{-2, -1, 0, +1, +2\}$  است، را روی یک شبکه‌ی یک‌بعدی با ضریب جفتش  $J$  در نظر بگیرید.

الف- ماتریس انتقال برای این سیستم را بنویسید.

ب- فرض کنید میدان مغناطیسی  $i$  خارجی  $B_0$  به این سیستم اعمال شود به طوری

<https://www.youtube.com/@amiraghamohammadi>

<https://staff.alzahra.ac.ir/aghhamohammadi>

که همیلتونی سیستم

$$H = -J \sum_i S_i S_{i+1} - B_0 \sum_i S_i \quad (۸۴.۳)$$

شود. ماتریس انتقال در حالت جدید چیست؟

۴.۳ مدل آیزینگ از ذراتی با اسپین  $S_i \in \{-1, +1\}$  است، روی شبکه‌ای یک‌بعدی با برهم‌کنش هم‌سایه بعدی<sup>۱</sup>

$$H = -J_1 \sum_i S_i S_{i+1} - J_2 \sum_i S_i S_{i+2}$$

در نظر بگیرید.

الف- با تغییر متغیر  $q_i = S_i S_{i+1}$  نشان دهید این همیلتونی را می‌توان به همیلتونی مدل آیزینگ با نزدیک‌ترین هم‌سایه در حضور میدان مغناطیسی تبدیل کرد.

ب- با استفاده از این تبدیل تابع پارش را به دست آورید.

ج- تابع هم‌بستگی  $\langle S_i S_{i+1} \rangle$  را به دست آورید.

۵.۳ مدل Blume-Capel مدلی برای آیزینگ با اسپین ۱ است. همیلتونی این مدل

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j + \Delta \sum_i S_i^2$$

است که  $S_i \in \{-1, 0, +1\}$  است. جمع اول روی اسپین‌های هم‌سایه و جمع دوم روی کل شبکه است.

الف- ماتریس انتقال برای مدل بلوم-کیپل را برای یک شبکه‌ی یک‌بعدی به دست آورید.

ب- انرژی آزاد  $F(T, \Delta, N)$  را به دست آورید.

ج- چگالی‌ی جای‌گاه‌های  $S = 0$  را به دست آورید.

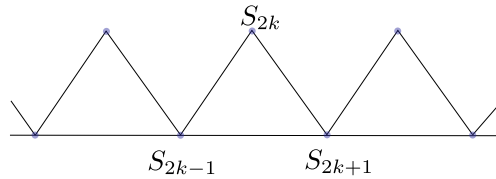
د- تابع هم‌بستگی‌ی  $\langle S_j S_{j+n} \rangle$  را به دست آورید.

۶.۳ مدل آیزینگ از  $2N$  ذره با دو حالت  $S = \pm 1$  روی یک شبکه‌ای دوره‌ای به طوری

که جای‌گاه  $2N + 1$  همان جای‌گاه ۱ است را مطابق شکل زیر و با همیلتونی

$$H = -J \sum_k (S_{2k-1} S_{2k} + S_{2k} S_{2k+1} + S_{2k-1} S_{2k+1})$$

در نظر بگیرید. ضریب جفت‌شدگی بین هر دو جای‌گاه را  $J$  و دما را  $T$  و  $N \gg 1$  بگیرد.



الف- تابع پارش را به دست آورید.

ب- انرژی متوسط دستگاه را به دست آورید.

ج- به این دستگاه میدان مغناطیسی ثابت  $B$  اعمال می‌کنیم، به طوری که همیلتونی به

$$H = -J \sum_k (S_{2k-1}S_{2k} + S_{2k}S_{2k+1} + S_{2k-1}S_{2k+1}) - B \sum_k S_k$$

تبدیل می‌شود. ماتریس انتقال را به دست آورید.

د- در حد میدان مغناطیسی خیلی ضعیف،  $\beta B \ll 1$  و با استفاده از تقریب

$$e^\epsilon \approx 1 + \epsilon,$$

تابع پارش را تا مرتبه  $\beta B$  محاسبه کنید.

ه- در حد میدان مغناطیسی خیلی قوی،  $\beta B \gg 1$ ، تابع پارش را محاسبه کنید. برای

این کار بزرگ‌ترین توان  $e^{\beta B}$  را نگه دارید.

و- تابع پارش را برای مقداری دل‌خواه از میدان مغناطیسی محاسبه کنید.

۷.۳ روی یک شبکه‌ی یک‌بعدی دوره‌ای با  $2N$  جای‌گاه، ( $N \gg 1$ )، که روی هر

جای‌گاه دو حالت  $S = \pm 1$  قرار دارند، ضریب جفتش یک‌درمیان تغییر می‌کند

$$H = -J_1 \sum_k S_{2k}S_{2k+1} - J_2 \sum_k S_{2k+1}S_{2k+2}$$

الف- ماتریس انتقال و تابع پارش را به دست آورید.

ب- انرژی متوسط دستگاه را به دست آورید.

ج-  $\langle S_{2k}S_{2k+1} \rangle$ ،  $\langle S_{2k+1}S_{2k+2} \rangle$  و  $\langle S_{2k}S_{2k+2} \rangle$  را به دست آورید.

**۸.۳ مدل  $XY$  یک‌بعدی<sup>۱</sup> -** زنجیره‌ای یک‌بعدی در نظر بگیرید که در هر جای‌گاه مثل  $i$ ، اسپین مثل یک عقربه‌ی مغناطیسی در دو بُعد است. اندازه‌ی اسپین ثابت و جهت آن با یک متغیر زاویه‌ای مثل  $\theta_i$  به طوری که  $0 \leq \theta_i \leq 2\pi$  تعیین می‌شود. این مدل  $XY$  یک‌بعدی است. توجه داشته باشید که تفاوتی که این مساله با مدل آیزینگ دارد در آنجا متغیر در هر جای‌گاه مقادیری گسسته (مثلاً  $S_i \in \{-1, +1\}$  در سیستم دو حالت) اختیار می‌کرد، که در نتیجه ماتریس انتقال محدود بعدی بود. در حالی که در این‌جا متغیر  $\theta_i$  پیوسته است و ماتریس انتقال بی‌نهایت بعدی است.

الف- شرط مرزی را باز بگیرید. تابع پارش را با استفاده از تغییر متغیر در متغیرهای  $\theta_i$  به دست آورید.

راه‌نمایی:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{x \cos \theta + in\theta} = I_n(x) \quad (۸۵.۳)$$

که  $I_n(x)$  تابع بسل تغییر یافته<sup>۲</sup> است.

ب- با استفاده از روش ماتریس انتقال تابع پارش را به دست آورید. فرض کنید شرط مرزی دوره‌ای است، یعنی  $\theta_{N+1} = \theta_1$ .

**۹.۳ مدل هایزنبرگ یک‌بعدی<sup>۳</sup> -** زنجیره‌ای یک‌بعدی در نظر بگیرید که اسپین در هر جای‌گاه مثل  $i$ ، مثل یک عقربه‌ی مغناطیسی است اندازه‌اش ثابت است ولی می‌تواند هر جهتی در فضا اختیار کند. جهت اسپین با دو متغیر زاویه‌ای مثل  $\theta_i$  و  $\phi_i$  تعیین می‌شود. این زاویه‌ها زوایای دستگاه کروی هستند و اسپین در هر جای‌گاه عبارت است از

$$\mathbf{S}_i = \sin \theta_i \cos \phi_i \mathbf{i} + \sin \theta_i \sin \phi_i \mathbf{j} + \cos \theta_i \mathbf{k}.$$

همیلتنونی این سیستم

$$H = -J \sum_{i=1}^N \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+1} \quad (۸۶.۳)$$

one-dimensional Heisenberg model<sup>۳</sup>    modified Bessel function<sup>۲</sup>    XY model<sup>۱</sup>

<https://www.youtube.com/@amiraghamohammadi>

<https://staff.alzahra.ac.ir/aghahammadi>

است. با جاگذاری همیلتونی در تابع پارش

$$Z = \int \frac{d\Omega_1}{4\pi} \dots \int \frac{d\Omega_N}{4\pi} e^{-\beta H} \quad (۸۷.۳)$$

آن را محاسبه کرده و نتیجه را بر حسب توابع لژاندر به دست آورید

$$Z = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) A_{\ell}^N, \quad (۸۸.۳)$$

که

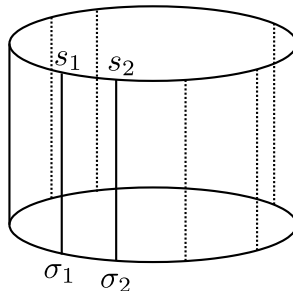
$$A_{\ell} := \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\cos\theta e^{\beta J \cos\theta} P_{\ell}(\cos\theta), \quad (۸۹.۳)$$

و  $P_{\ell}(\cos\theta)$  تابع لژاندر با شاخص  $\ell$  است.

۱۰.۳ مدل آیزینگ روی شبکه‌ای نردبانی با همیلتونی

$$H = -J_1 \sum_{\langle i \rangle} s_i s_{i+1} - J_2 \sum_{\langle i \rangle} \sigma_i \sigma_{i+1} - J_3 \sum_i s_i \sigma_i$$

را در نظر بگیرید. فرض کنید  $\sigma_i \in \{-1, +1\}$ ,  $s_i \in \{-1, +1\}$ .



برای نوشتن تابع پارش لازم است یک موجود ۴ شاخصه مثل  $T(\sigma, s; \sigma', s')$  را تعریف کنید. ماتریس انتقال یک ماتریس ۴ در ۴ است و ۱۶ عنصر دارد. این ماتریس را به دست آورید.

۱۱.۳ سیستمی اسپینی روی شبکه‌ای یک‌بعدی، دوره‌ای که تعداد جای‌گاه‌ها  $N$  خیلی بزرگ و زوج است را در نظر بگیرید. برهم‌کنش بین نزدیک‌ترین هم‌سایه‌هاست و همیلتونی سیستم

$$H = -J \sum_k [\sigma_{2k} S_{2k+1} + S_{2k+1} \sigma_{2k+2}] \quad (۹۰.۳)$$

است. در جای‌گاه‌های زوج ذرات با اسپین دو حالت  $\sigma_{2k} \in \{-1, +1\}$  و در جای‌گاه‌های فرد سه حالت  $S_{2k+1} \in \{-1, 0, +1\}$  هستند. الف- ماتریس انتقال برای این سیستم را بنویسید. برای این کار ساده‌تر است که با ترکیب جملات، همیلتونی را به شکل

$$H = -J \sum_k [\sigma_{2k} + \sigma_{2k+2}] S_{2k+1} \quad (۹۱.۳)$$

بنویسید و سپس برای محاسبه‌ی ماتریس انتقال، روی جای‌گاه‌های فرد جمع بزنید.

$$T_{\sigma_{2k}, \sigma_{2k+2}} = \sum_{S_{2k+1}} \exp\{\beta J [\sigma_{2k} + \sigma_{2k+2}] S_{2k+1}\} \quad (۹۲.۳)$$

یعنی یک ماتریس انتقال  $2 \times 2$  بسازید.

ب- تابع پارش را در حد ترمودینامیکی یعنی  $N$  های خیلی بزرگ به دست آورید.

ج- متوسط اسپین در جای‌گاه‌های زوج  $\langle \sigma_{2k} \rangle$  را به دست آورید.

۱۲.۳ تابع پارش برای مدل آیزینگ یک بعدی با شرایط مرزی غیردوره‌ای، معین در (۸۱.۳) و آزاد در (۸۲.۳) را به دست آورید.





## بسطِ سری: روش‌های تقریبی برای دماهای بالا و دماهای پایین

### ۱.۴ مقدمه

در فصل‌های قبل با روش میدان میان‌گین، روشی تقریبی برای حل دسته‌ای از مسائل مکانیک آماری و همین‌طور روش ماتریس انتقال، روشی دقیق که در زنجیره‌های یک‌بعدی از آن استفاده کردیم، آشنا شدیم. مسئله‌ی ما عمدتاً محاسبه‌ی تابع پارش، مغناطش، توابع هم‌بستگی و احیاناً گذار فاز بود. در این فصل با یک روش تقریبی دیگر یعنی روش بسط سری آشنا می‌شویم. در دو تقریب دماهای بالا و دماهای پایین از این روش تقریبی برای محاسبه‌ی تابع پارش استفاده می‌کنیم.

### ۲.۴ بسطِ سری: روش‌های تقریبی برای دماهای بالا

برای یاد گرفتن این روش بیایید با یک مثال ساده شروع کنیم. دستگاهی اسپینی با همیلتونی‌ی

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j \quad (1.4)$$

<https://www.youtube.com/@amiraghamohammadi>

<https://staff.alzahra.ac.ir/aghahammadi>

نماد  $(i, j)$  یعنی جای‌گاه‌های  $i$  و  $j$  هم‌سایه هستند و هر دو جای‌گاه هم‌سایه که دو سوی یک رابط هستند، فقط یک‌بار شمرده می‌شوند.  $S_i$  برای سیستم دو‌حالتی، اسپین در جای‌گاه  $i$  دو مقدار  $\pm 1$  را می‌گیرد. تعداد جای‌گاه‌های این شبکه را  $N$ ، تعداد کل رابطه‌های شبکه  $\mathcal{L}$  و تعداد هم‌سایه‌های هر جای‌گاه را  $z$  بگیرد. برای یک شبکه‌ی یک‌بُعدی دوره‌ای  $\mathcal{L} = N$  است. در حالت کلی برای یک شبکه‌ی دوره‌ای، هر جای‌گاه  $z$  هم‌سایه دارد و به ازای  $N$  جای‌گاه،  $Nz$  رابط وجود دارد. اما هر رابط بین دو جای‌گاه است و برای آن که دوبار شمارش نکنیم، برای به دست آوردن  $\mathcal{L}$  باید نتیجه را بر ۲ تقسیم کنیم. پس

$$\mathcal{L} = \frac{Nz}{2}. \quad (2.4)$$

تابع پارش برای این سیستم عبارت است از

$$\begin{aligned} Z &= \sum e^{-\beta H} \\ &= \sum_{\{S_k\}} \exp \left( \beta J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j \right) \\ &= \sum_{\{S_k\}} \prod_{l_{ij}} e^{\beta J S_i S_j} \end{aligned} \quad (3.4)$$

جمع روی تمام اسپین‌هاست و علامت ضرب روی تمام رابطه‌های بین اسپین‌های هم‌سایه است. مساله این است که آیا می‌توانیم این جمع را به شکل ساده‌ای حداقل در یک تقریب (این‌جا تقریب دمای بالا) محاسبه کنیم.

تابع  $e^{\alpha M}$  با این قید که  $M^2 = 1$  باشد، ساده می‌شود

$$\begin{aligned} e^{\alpha M} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha M)^n}{n!} \\ &= 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} + M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= 1 \cosh \alpha + M \sinh \alpha \end{aligned} \quad (4.4)$$

که در این‌جا از این‌که

$$M^{2n} = 1, \quad M^{2n+1} = M,$$

است، استفاده کرده‌ایم. راه ساده‌ی دیگر قطری کردن ماتریس  $\mathbf{M}$  است.<sup>۱</sup> فرض کنید ماتریس قطری‌کننده  $\mathbf{U}$  باشد. در این صورت

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{U} = \mathbf{M}_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (۵.۴)$$

چون  $\mathbf{M}^2 = \mathbf{1}$  است، پس

$$e^{\alpha\mathbf{M}} = \mathbf{1}A(\alpha) + \mathbf{M}B(\alpha), \quad (۶.۴)$$

یا

$$e^{\alpha\mathbf{M}_D} = \mathbf{1}A(\alpha) + \mathbf{M}_DB(\alpha), \quad (۷.۴)$$

که نتیجه می‌دهد

$$e^{\alpha} = A(\alpha) + B(\alpha), \quad (۸.۴)$$

$$e^{-\alpha} = A(\alpha) - B(\alpha), \quad (۹.۴)$$

یا

$$A(\alpha) = \cosh \alpha, \quad (۱۰.۴)$$

$$B(\alpha) = \sinh \alpha. \quad (۱۱.۴)$$

ترکیب  $S_i S_j$  برای سیستم دو حالتی که بررسی می‌کردیم، این خاصیت را دارد، یعنی توان دوی آن حتماً واحد است. پس

$$\begin{aligned} e^{\beta JS_i S_j} &= \cosh(\beta J) + \sinh(\beta J) S_i S_j \\ &= \cosh(\beta J)(1 + \tau S_i S_j), \end{aligned} \quad (۱۲.۴)$$

<sup>۱</sup> چون توان دوم این ماتریس، ماتریس واحد است، دترمینان آن  $+1$  یا  $-1$  است. اگر دترمینان آن  $-1$  باشد ویژه مقادیرش  $\pm 1$  هستند. اگر دترمینان آن  $+1$  باشد، یعنی ماتریس  $\mathbf{M}$  متناسب با واحد و خودش قطری است.

که  $\tau := \tanh(\beta J)$  است. پس

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\{S_k\}} \prod_{l_{ij}} e^{\beta J S_i S_j} \\ &= [\cosh(\beta J)]^{\mathcal{L}} \sum_{\{S_k\}} \prod_{l_{ij}} (1 + \tau S_i S_j) \\ &= [\cosh(\beta J)]^{\mathcal{L}} \sum_{\{S_k\}} \left[ 1 + \tau \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j + \tau^2 \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j \sum_{\langle m,n \rangle} S_m S_n + \dots \right] \end{aligned}$$

که  $\mathcal{L}$  تعداد کل رابطه‌های شبکه است. بیایید ببینیم معنی جمله‌های این بسط چیست. اگر جمع روی جای‌گاه‌ها را در نظر بگیریم

$$\begin{aligned} \sum_{S_i=\pm 1} 1 &= 2, \quad \sum_{S_i=\pm 1} \sum_{S_j=\pm 1} 1 = 2^2, \dots, \quad \sum_{\{S_k\}} 1 = 2^N \\ \sum_{S_i=\pm 1} S_i &= 0, \quad \sum_{S_i=\pm 1} \sum_{S_j=\pm 1} S_i S_j = 0, \\ \sum_{S_i=\pm 1} \sum_{S_j=\pm 1} \dots \sum_{S_k=\pm 1} S_i^{n_i} S_j^{n_j} \dots S_k^{n_k} &= \begin{cases} 2^N, & \text{همه } n_l \text{ ها زوج باشند} \\ 0, & \text{حداقل یکی از } n_l \text{ ها زوج نباشد} \end{cases} \end{aligned}$$

اما باید توجه داشته باشیم که در بسط تابع پارش، با جمع روی رابطه‌ها  $\langle i, j \rangle$  هم سروکار داریم. بیایید برای فهم مطلب فرض کنیم شبکه مربعی است و هر جای‌گاه 4 هم‌سایه دارد. محاسبه‌ی چهارجمله‌ی اول برای یک شبکه‌ی مربعی ساده‌تر است. جمله‌ی اول سهم جمع روی 1 است. نشان می‌دهیم که سه جمله‌ی بعدی در بسط تابع پارش سهمی ندارند.

$$\begin{aligned} \sum_{\{S_k\}} 1 &= 2^N \\ \sum_{\{S_k\}} \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j &= 0 \end{aligned}$$

شکل (۱۰۴) را ببینید.

- برای به دست آوردن ضریب  $\tau^{\mathcal{L}}$  در تابع پارش لازم است به نکات زیر توجه کنیم
- فقط وقتی جمله‌ای غیرصفر می‌شود که توان اسپین مربوط به همه‌ی جای‌گاه‌ها زوج باشد، یعنی هر جای‌گاه زوج بار (حداقل دو بار) سهم داشته باشد.

- هر رابط فقط یک بار ظاهر می‌شود و نمی‌توانیم مسیرهای رفت و برگشت روی یک رابط داشته باشیم.
  - تنها وقتی هر جای‌گاه زوج بار (حداقل دو بار) سهم دارد که رابط‌ها یک مسیر بسته بسازند. سهم هر دو مسیر بسته به طول  $\ell$  برابر است.
- بنا بر این برای به دست آوردن ضریب  $\tau^\ell$  لازم است، تعداد مسیرهای بسته به طول  $\ell$ ، که با  $\mathcal{N}_\ell$  نشان می‌دهیم، را داشته باشیم. بنا بر این تابع پارش می‌رسیم به

$$Z = [\cosh(\beta J)]^L 2^N \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathcal{N}_\ell \tau^\ell \quad (۱۳.۴)$$

$$= [\cosh(\beta J)]^{Nz/2} 2^N \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathcal{N}_\ell \tau^\ell \quad (۱۴.۴)$$

که همیشه  $\mathcal{N}_0 = 1$  است.

**مثال ۱۰.۲۰۴.** ساده‌ترین حالت مدل آیزینگ روی شبکه‌ای یک‌بُعدی و دوره‌ای است. در این حالت،  $z = 2$  و تنها یک مسیر بسته روی شبکه وجود دارد که آن‌هم کل شبکه را در بر می‌گیرد. پس تنها جمله‌های غیر صفر

$$\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}_N = 1$$

هستند. بنا بر این تابع پارش عبارت است از

$$Z = [\cosh(\beta J)]^N 2^N (1 + \tau^N) = 2^N ([\cosh(\beta J)]^N + [\sinh(\beta J)]^N) \quad (۱۵.۴)$$

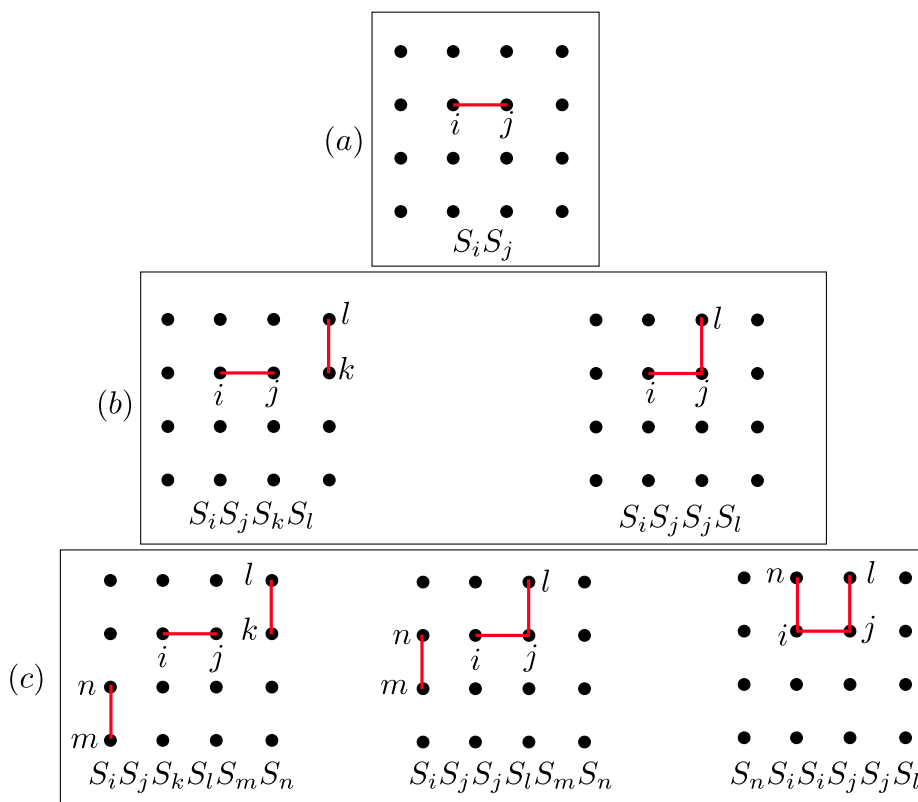
اگر شرط مرزی دوره‌ای نباشد هیچ مسیر دوره‌ای نداریم و در این صورت در محاسبه‌ی تابع پارش فقط جمله‌ی اول سری باقی می‌ماند. پس

$$Z = [\cosh(\beta J)]^N 2^N. \quad (۱۶.۴)$$

در حد ترمودینامیک دو جوابی که برای تابع پارش به دست آوردیم یکی می‌شوند.

**مثال ۲۰.۲۰۴.** یک مدل ساده‌ی دیگر مدل آیزینگ روی شبکه‌ی مربعی و دوره‌ای است

$$\mathcal{N}_{2k+1} = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (۱۷.۴)$$



شکل ۱۰۴ نقاط شبکه با دایره‌های سیاه‌رنگ و رابط‌ها با خط‌های قرمز رنگ نشان داده شده‌اند. در شکل (a) سهم یک رابط در بسط، در شکل (b) سهم دو رابط در بسط، و در شکل (c) سهم سه رابط در بسط در نظر گرفته شده‌اند. سهم هر سه حالت صفر است.

$$\mathcal{N}_2 = 0 \quad (18.4)$$

$$\mathcal{N}_4 = N \quad (19.4)$$

$$\mathcal{N}_6 = 2N \quad (20.4)$$

$$\mathcal{N}_8 = \frac{N(N+9)}{2} \quad (21.4)$$

⋮

است. شکل (۲۰.۴) را ببینید. ضرایب توان‌های فرد  $\tau$  چون به مسیرهای بسته مربوط نیستند،

<https://www.youtube.com/@amiraghamohammadi>

<https://staff.alzahra.ac.ir/aghahammadi>

صفر هستند. کوچک‌ترین مسیر بسته مربعی به طول واحد شبکه است. تعداد حالت‌های ممکن برای حضور یک مربع روی شبکه  $N$  است. در واقع کافی است یکی از رأس‌های مربع را در نظر بگیریم، مثلاً رأس بالایی سمت چپ. با تعیین این رأس، مربع به طور یک‌تا تعیین می‌شود. برای این رأس،  $N$ ، یعنی به تعداد جای‌گاه‌های شبکه انتخاب داریم. پس  $\mathcal{N}_4 = N$  است. مسیر بسته‌ی بزرگ‌تر، مستطیلی به محیط ۶ واحد است. ما دو جور مستطیل می‌توانیم داشته باشیم. مستطیلی که افقی باشد یا عمودی. برای هر کدام  $N$  انتخاب داریم. پس  $\mathcal{N}_6 = 2N$ . همان‌طور که در شکل (۲۰۴) می‌بینید، برای مسیر بسته‌ای با محیط ۸ واحد، چهار نوع شکل متفاوت می‌توانیم داشته باشیم. مربع و مستطیل شبیه حالت‌های قبل هستند. اما موردی که شبیه  $L$  است، کمی پیچیده‌تر است. ما  $N$  انتخاب برای مربع‌های با محیط ۸ داریم. درون هر مربع ۴ جور مختلف می‌توانیم شکل  $L$  را قرار دهیم. پس برای این حالت  $4N$  انتخاب داریم. آخرین نوع شکل دویارچه است. دو مربع با محیط ۴. برای یکی از مربع‌ها  $N$  انتخاب داریم. مربع دیگر هرجایی می‌تواند باشد، به جز درست روی همین مربع و چهار مربع مجاور مربع اول که شکلی دویارچه با محیط ۸ نیست، یعنی ۵ مربع را باید مستثنی کنیم. پس برای مربع دوم  $N - 5$  انتخاب داریم. اما برای اجتناب از دوبار شمارش باید به یک ۲ هم تقسیم کنیم. سرجمع تعداد حالات  $\frac{N(N-5)}{2}$  است. بنا بر این تابع پارش عبارت است از

$$Z = [\cosh(\beta J)]^{2N} 2^N (1 + N\tau^4 + 2N\tau^6 + \frac{N(N+9)}{2}\tau^8 + \dots). \quad (22.4)$$


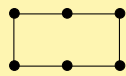
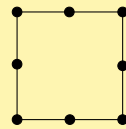
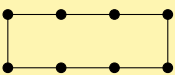
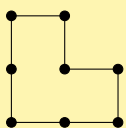
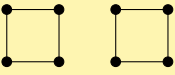
انرژی آزاد بر هر ذره در حد ترمودینامیکی

$$\begin{aligned} f &:= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{F}{N} = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{kT \ln Z}{N} \\ &= -kT \ln [2 \cosh^2(\beta J)] - g_H(\tau) \end{aligned} \quad (23.4)$$

است، که

$$g_H(\tau) := \frac{kT}{N} \ln \left( \sum_{\ell=0} \mathcal{N}_\ell \tau^\ell \right) \quad (24.4)$$

است. توجه دارید که اگر سیستم گذار فاز داشته باشد و در انرژی آزاد تکینگی داشته باشیم، این

$\tau^4$		$N$	$N$
$\tau^6$		$2N$	$2N$
$\tau^8$		$N$	$\frac{N(N+9)}{2}$
		$2N$	
		$4N$	
		$\frac{N(N-5)}{2}$	

شکل ۲.۴ در مدل آیزینگ روی شبکه‌ای مربعی و با دو حالت در هر جای‌گاه، مسیرهای بسته‌ی ممکن با تعداد دفعاتی که در تابع پارش می‌توانند ظاهر شوند تا جمله‌ی  $\tau^8$  در شکل آورده شده‌اند.

تکنیکی در  $g_H(\tau)$  است. در ضمن این تابع مثبت، کمینه‌اش صفر و نسبت به  $\tau$  تابعی صعودی است.

در تقریب دمای بالا،  $K := \beta J \ll 1$  که همان  $J/k \gg T$  است،

$$\tau = \tanh(\beta J) \approx \beta J \ll 1, \quad (۲۵.۴)$$

است و در بسط تابع پارش برحسب  $\tau$  می‌توانیم از توان‌های بالای  $\tau$  چشم‌پوشی کنیم. توجه داشته باشید که این بسط واقعاً بسط برای  $K := \beta J \ll 1$  است و تعبیر دیگری هم می‌توانیم داشته باشیم. در واقع این بسط در دماهای بالا  $J/k \gg T$  یا معادل آن ضریب جفتش پایین

<https://www.youtube.com/@amiraghamohammadi>

<https://staff.alzahra.ac.ir/aghahammadi>



$J \ll kT$  است.

در تقریب دمای بالا انرژی آزاد این سیستم

$$\begin{aligned} F &= -kT \ln Z \\ &= -NkT \ln 2 - 2NkT \ln[\cosh(\beta J)] \\ &\quad - kT \ln\left(1 + N\tau^4 + 2N\tau^6 + \frac{N(N+9)}{2}\tau^8 + \dots\right) \quad (26.4) \end{aligned}$$

است. در ادامه از تقریب‌های زیر استفاده می‌کنیم

$$\cosh(\beta J) = \frac{1}{1 - \tau^2}, \quad (27.4)$$

$$\ln(1 + \epsilon) = \epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^3}{3} + \dots, \quad |\epsilon| \ll 1. \quad (28.4)$$

می‌توانیم جملات دوم و سوم انرژی آزاد را برای  $\tau \ll 1$  بسط دهیم

$$-2NkT \ln[\cosh(\beta J)] = NkT \ln(1 - \tau^2) = -NkT \left[ \tau^2 + \frac{\tau^4}{2} + \frac{\tau^6}{3} + \dots \right] \quad (29.4)$$

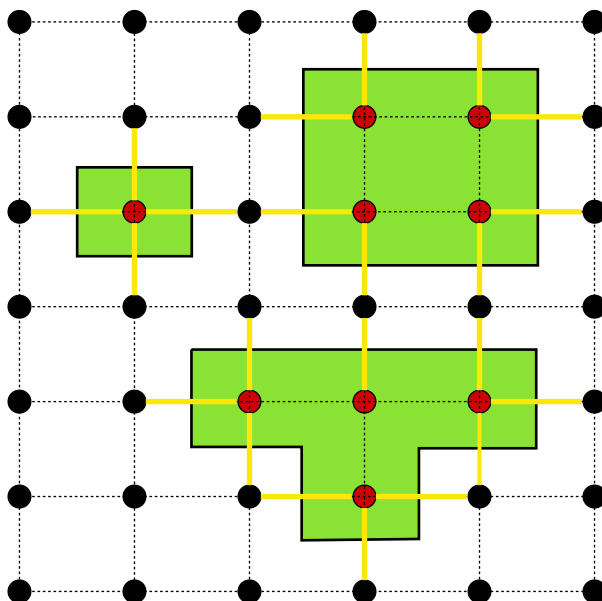
در بسط بالا همه‌ی جملات متناسب با  $N$  هستند و با بزرگ‌کردن سیستم متناسب با آن بزرگ می‌شوند. این همان چیزی است که ما از انرژی انتظار داریم. ما انتظار داریم انرژی کمی فزون‌ور باشد، یعنی با دو برابر کردن سیستم، دو برابر شود. اما در بسط جمله‌ی سوم می‌رسیم به

$$\begin{aligned} &-kT \ln\left(1 + N\tau^4 + 2N\tau^6 + \frac{N(N+9)}{2}\tau^8 + \dots\right) \\ &= -kT \left( N\tau^4 + 2N\tau^6 + \frac{N(N+9)}{2}\tau^8 + \dots \right) \\ &\quad + \frac{kT}{2} (N\tau^4 + 2N\tau^6 + \dots)^2 \\ &\quad - \frac{kT}{3} (N\tau^4 + 2N\tau^6 + \dots)^3 + \dots \quad (30.4) \end{aligned}$$

که ظاهراً جملات متناسب با توان‌های مختلف  $N$  در آن ظاهر می‌شود. اما اگر می‌توانستیم محاسبه را به دقت انجام دهیم و بسط همه‌ی جملات را در نظر بگیریم، خواهیم دید که ضرایب توان‌های بالاتر از یک  $N$  صفر می‌شوند. تا همین جا هم اگر ضریب  $\tau^8$  را محاسبه کنیم، جمله‌های متناسب با  $N^2$  هم‌دیگر را حذف می‌کنند.

### ۳.۴ بسط سری: روش‌های تقریبی برای دماهای پایین

دستگاهی اسپینی از ذرات دو حالتی با همیلتونی  $H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j$  و شرط مرزی دوره‌ای در نظر بگیرید. تعداد جای‌گاه‌ها  $N$  و تعداد هم‌سایه‌های هر جای‌گاه را  $z$  می‌گیریم. در این صورت تعداد رابط‌ها در این سیستم  $\mathcal{L} = \frac{Nz}{2}$  است. اگر اسپین دو سر رابطی یکی باشد، انرژی‌ای که به آن رابط نسبت می‌دهیم  $-J$  است. در حالتی که همه‌ی جای‌گاه‌ها اسپین مشابه داشته باشند، مثلاً همه مثبت و یا همه منفی باشند، انرژی سیستم کمینه و  $E_0 = -\frac{NzJ}{2}$  است. به این حالت‌ها، حالت‌های منظم می‌گوییم. حالت پایه تبه‌گنی مرتبه‌ی ۲ دارد، یا همه‌ی اسپین‌ها  $+1$  و یا همه  $-1$  هستند. اگر فقط یکی از اسپین‌ها تغییر علامت دهد، انرژی  $z$  رابط عوض می‌شود و انرژی‌ای که به آن‌ها نسبت داده بودیم، از  $Jz$  به  $-Jz$  تغییر می‌کند. بنا بر این انرژی حالت برانگیخته‌ی اول، برای چنین سیستمی  $E_1 = -\frac{NzJ}{2} + 2zJ$  است. شکل (۳.۴) را ببینید. بخشی از یک شبکه‌ی دوره‌ای مربعی را می‌بینید. جای‌گاه‌هایی که اسپین‌شان مثبت است را با دایره‌های سیاه و آن‌هایی که اسپین‌شان منفی است را با دایره‌های قرمز نشان داده‌ایم. چون برای شبکه‌ی مربعی  $z = 4$  است، اگر همه‌ی جای‌گاه‌ها سیاه باشند، انرژی سیستم کمینه و  $E_0 = -2NJ$  است. در شکل (۳.۴)، بعضی از جای‌گاه‌ها قرمز هستند. به ازای هر جای‌گاهی که قرمز شود متناسب با تعداد هم‌سایه‌های سیاهش، که در شکل با رابط‌های زرد نشان داده‌ایم انرژی سیستم زیاد می‌شود. به ازای هر رابط زرد انرژی به اندازه‌ی  $2J$  زیاد می‌شود. در شکل جزیره‌هایی از جای‌گاه‌های قرمز داریم. همان‌طور که می‌بینیم یک جزیره تک‌جایگاهی ۴ رابط دارد و باعث افزایش انرژی سیستم به اندازه‌ی  $8J$  می‌شود. دو جزیره‌ی چهارجایگاهی هم هستند. یکی از آن‌ها ۸ رابط زرد دارد و باعث افزایش انرژی  $16J$  می‌شود. دیگری ۱۰ رابط زرد دارد و باعث افزایش انرژی  $20J$  می‌شود. سهم هر جزیره در افزایش انرژی  $2J\ell$  است که  $\ell$  تعداد رابط‌های زرد است. تعداد رابط‌های زرد هر جزیره با محیط آن جزیره برابر است. همان‌طور که می‌بینیم در این تقریب هم سر و کله‌ی مسیرهای بسته با طول معین پیدا می‌شود. تفاوت در این است که در دماهای بالا، محیط خم بسته‌ای روی شبکه ظاهر می‌شود، اما در این جا و در تقریب دمای پایین محیط خمی که جزیره‌ای از جای‌گاه‌های روی شبکه را در بر می‌گیرد، ظاهر

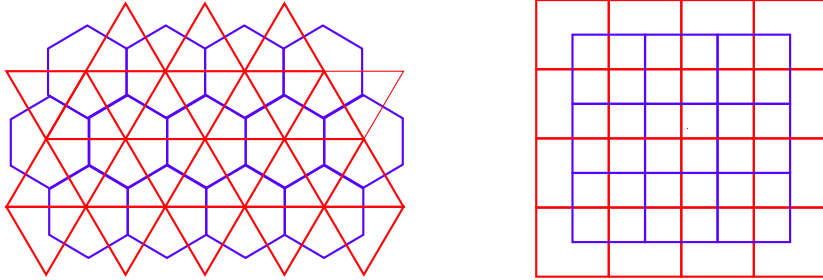


شکل ۳.۴ جای‌گاه‌هایی که اسپین‌شان مثبت (منفی) است را با دایره‌های سیاه (قرمز) نشان داده‌ایم. به ازای هر جای‌گاه که قرمز شود متناسب با تعداد هم‌سایه‌های سیاهش، که در شکل با رابط‌های زرد نشان داده‌ایم انرژی سیستم زیاد می‌شود. سهم هر جزیره در افزایش انرژی  $2Jl$  است که  $l$  محیط جزیره است.

می‌شود. این خم در واقع، خمی روی شبکه‌ی دوگان شبکه‌ی اسپینی است. برای یک شبکه‌ی معین، عمودمنصف رابط‌ها، رابط‌های شبکه‌ی دوگان<sup>۱</sup> هستند. شبکه‌ی مربعی خود-دوگان<sup>۲</sup> است. اما در حالت کلی لزومی ندارد یک شبکه‌ی دل‌خواه با شبکه‌ی دوگانش یکی باشد. در حالتی که شبکه‌ای با دوگانش یکی بود، خود-دوگان است. دوگان یک شبکه‌ی مثلثی شبکه‌ی لانه‌زنبوری است. شکل (۴.۴) را ببینید. به ازای هر رابط در یک شبکه، یک رابط در شبکه‌ی دوگان وجود دارد، پس تعداد رابط‌های هر شبکه با تعداد رابط‌های شبکه‌ی دوگانش برابر است. بنا بر این

$$\mathcal{L} = \tilde{\mathcal{L}}, \quad \Rightarrow \quad zN = \tilde{z}\tilde{N}, \quad (۳.۱.۴)$$

که علامت  $\sim$  بالای هر کمیت نمادی است به این معنی که آن کمیت مربوط به شبکه‌ی دوگان



شکل ۴.۴ شبکه‌ی مربعی خود-دوگان است، ولی شبکه‌های مثلثی و لانه‌زنبوری دوگان هم هستند.

است.

همان‌طور که در شکل (۳.۴) می‌بینید، برای یک شبکه‌ی مربعی که تعداد رابط‌های زرد آن تعداد رابط‌هایی که اسپین دو سر آن متفاوت‌اند)،  $\ell$  باشد، انرژی سیستم

$$E(\ell) = -2JN + 2J\ell \quad (۳۲.۴)$$

است. تابع پارش

$$\begin{aligned} Z &= \sum e^{-\beta H} \\ &= 2 e^{2\beta JN} \sum_{\ell=0} \mathcal{M}_{\ell} e^{-2\beta J\ell} \\ &= 2 e^{2\beta JN} \sum_{\ell=0} \mathcal{M}_{\ell} v^{\ell} \end{aligned} \quad (۳۳.۴)$$

است، که  $\mathcal{M}_{\ell}$  تعداد جزیره‌های با محیط  $\ell$  و  $v := e^{-2\beta J}$  است. ضریب ۲ در (۳۳.۴) به خاطر تقارن سیستم تحت تبدیل  $- \Leftrightarrow +$  است. در محاسبه‌ی تابع پارش به ازای هر آرایش، آرایشی مشابه وجود دارد که اسپین‌های مثبت به منفی تبدیل شده‌اند و بالعکس، ولی هر دو آرایش یک انرژی دارند. همان‌طور که در شکل (۳.۴) هم می‌بینید شبکه‌ای که از رابط‌ها ساخته می‌شود و شبکه‌ای که جزیره‌ها روی آن ساخته می‌شوند، مربعی هستند. بنا بر این برای شبکه‌ی مربعی

$$\mathcal{M}_{\ell} = \mathcal{N}_{\ell} \quad (۳۴.۴)$$

است. انرژی آزاد بر هر ذره در حد ترمودینامیکی

$$f := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{F}{N} = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{kT \ln Z}{N} \\ = - 2J - g_L(v) \quad (35.4)$$

که

$$g_L(v) := \frac{kT}{N} \ln \left( \sum_{\ell=0} M_{\ell} v^{\ell} \right) \quad (36.4)$$

است. توجه دارید که اگر سیستم گذار فاز داشته باشد و در انرژی آزاد بخوایم تکینگی داشته باشیم، این تکینگی در  $g_L(v)$  است. در ضمن این تابع مثبت، کمینه‌اش صفر و نسبت به  $v$  تابعی صعودی است.

اگر خود را به شبکه‌ی مربعی محدود نمی‌کردیم در تقریب دمای پایین می‌رسیدیم به

$$Z = 2 e^{\beta J L} \sum_{\ell=0} M_{\ell} v^{\ell}. \quad (37.4)$$

در تقریب دمای پایین،  $\beta J \gg 1$  که همان  $J/k \gg T$  (یا معادل آن جفتش بالا  $J \gg kT$ ) است،

$$v = e^{-2\beta J} \ll 1, \quad (38.4)$$

و در بسط تابع پارش برحسب  $v$ ، می‌توانیم از توان‌های بالای  $v$  چشم‌پوشی کنیم.

**مثال ۱۰.۳.۴.** در این مثال می‌خواهیم بسط دمای پایین مدل آیزینگ روی شبکه‌ی مربعی دوره‌ای را به دست آوریم. همان‌طور که دیدیم شبکه‌ی مربعی خود دوگان است، پس  $M_{\ell} = N_{\ell}$  است. پس بسط دمای پایین، شبیه بسط دمای بالا است. با استفاده از نتایج آن تابع پارش در تقریب دمای پایین عبارت است از

$$Z = 2 e^{2\beta N J} (1 + N v^4 + 2N v^6 + \frac{N(N+9)}{2} v^8 + \dots). \quad (39.4)$$

## ۴.۴ شبکه‌های اسپینی در دماهای بالا و شبکه‌های دوگان آن‌ها در دماهای پایین

اگر یک شبکه‌ی اسپینی را در دمای بالا مطالعه کنیم ضرایب جمله‌های بسط تابع پارش شبیه سیستمی اسپینی است، که اسپین‌ها روی شبکه‌ی دوگان آن نشسته باشند. پس

$$\mathcal{N}_\ell = \tilde{\mathcal{M}}_\ell, \quad \mathcal{M}_\ell = \tilde{\mathcal{N}}_\ell. \quad (۴۰.۴)$$

با استفاده از (۱۳.۴)، (۳۷.۴) بسط تابع پارش برای دماهای بالا و پایین روی یک شبکه‌ی معین عبارت است از

$$Z_{HT} = [\cosh(K)]^\mathcal{L} 2^N \sum_{\ell=0}^{\mathcal{L}} \mathcal{N}_\ell [\tanh(K)]^\ell, \quad (۴۱.۴)$$

$$Z_{LT} = 2 e^{K\mathcal{L}} \sum_{\ell=0}^{\mathcal{L}} \mathcal{M}_\ell e^{-2K\ell}, \quad (۴۲.۴)$$

و بسط تابع پارش برای دماهای بالا و پایین روی شبکه‌ی دوگان آن، عبارت است از

$$\tilde{Z}_{HT} = [\cosh(\tilde{K})]^\mathcal{L} 2^N \sum_{\ell=0}^{\mathcal{L}} \mathcal{M}_\ell [\tanh(\tilde{K})]^\ell, \quad (۴۳.۴)$$

$$\tilde{Z}_{LT} = 2 e^{\tilde{K}\mathcal{L}} \sum_{\ell=0}^{\mathcal{L}} \mathcal{N}_\ell e^{-2\tilde{K}\ell}. \quad (۴۴.۴)$$

در این‌جا از (۳۱.۴) و (۴۰.۴) استفاده کرده‌ایم.

برای شبکه‌های خود-دوگان می‌توانیم چیزهای بیش‌تری بگوییم. اما چون برای یک شبکه‌ی خود-دوگان  $\mathcal{M}_\ell = \mathcal{N}_\ell$  است، دو سری که در جواب‌های بالا ظاهر می‌شوند، تمام ضرایب بسط یکی هستند. پس می‌توان هر دو را با یک تابع مثل  $F(x) = \sum_{\ell=0}^{\mathcal{L}} \mathcal{N}_\ell x^\ell$  نشان داد

$$F(\tanh(K)) = \sum_{\ell=0}^{\mathcal{L}} \mathcal{N}_\ell [\tanh(K)]^\ell, \quad (۴۵.۴)$$

و

$$F(e^{-2\tilde{K}}) = \sum_{\ell=0}^{\mathcal{L}} \mathcal{N}_\ell e^{-2\tilde{K}\ell}. \quad (۴۶.۴)$$

تابع پارش در دمای بالا و در دمای پایین برای شبکه‌های خود-دوگان را می‌توان بر حسب تابع  $F$  برای دو آرگومان مختلف نوشت. در صورتی که

$$\tanh(K) = e^{-2\tilde{K}} \Rightarrow \tanh\left(\frac{J}{kT_H}\right) = \exp\left(-\frac{2J}{kT_L}\right), \quad (47.4)$$

باشد، متغیر دو تابع هم دقیقاً یکی می‌شود. پس

$$\frac{Z_{HT}}{2^N \{\cosh(K)\}^{\mathcal{L}}} = \frac{Z_{LT}}{2 \exp\{\tilde{K}\mathcal{L}\}}. \quad (48.4)$$

بنابراین تابع پارش در دمای بالا و در دمای پایین به هم مربوط هستند. با مطالعه‌ی یکی در مورد دیگری هم اطلاع خواهیم داشت. به این ویژگی خاصیت دوگانی<sup>۱</sup> می‌گوییم. از (۴۷.۴) نتیجه می‌شود

$$\frac{e^K - e^{-K}}{e^K + e^{-K}} = e^{-2\tilde{K}}, \quad (49.4)$$

با محاسبه‌ی جبری‌ی ساده‌ای روابط زیر را هم می‌توانید نشان دهید

$$e^{-2K} = \frac{e^{\tilde{K}} - e^{-\tilde{K}}}{e^{\tilde{K}} + e^{-\tilde{K}}}, \quad (50.4)$$

$$\tilde{K} = -\frac{1}{2} \ln(\tanh(K)) \quad (51.4)$$

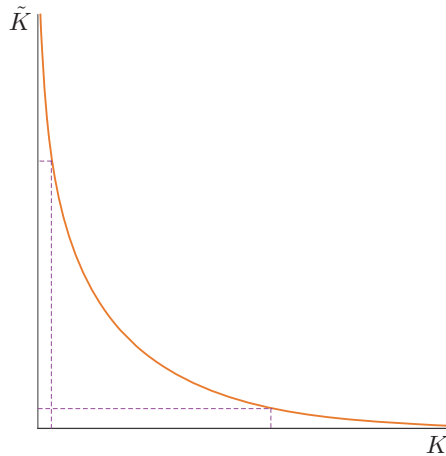
$$K = -\frac{1}{2} \ln(\tanh(\tilde{K})) \quad (52.4)$$

$$\frac{2 \tanh(K)}{1 - \tanh^2(K)} = \frac{2 e^{-2\tilde{K}}}{1 - e^{-4\tilde{K}}} \quad (53.4)$$

$$\sinh(2K) \sinh(2\tilde{K}) = 1. \quad (54.4)$$

همان‌طور که از این روابط می‌بینیم تقارنی بین  $K$  و  $\tilde{K}$  وجود دارد.  $K$  که بزرگ باشد،  $\tilde{K}$  کوچک است و برعکس. شکل (۵.۴) را ببینید. در این صورت برای یک شبکه‌ی خود-دوگان تابع پارش در دمای بالا و تابع پارش در دمای پایین به هم مربوط می‌شوند، یا تابع پارش در جفتش کم و تابع پارش در جفتش زیاد به هم مربوط می‌شوند.

$$Z_{HT} = 2^{N-1} [\cosh^2(K) e^{-2\tilde{K}}]^{\mathcal{L}/2} Z_{LT}$$



شکل ۵.۴ منحنی تغییرات  $\tilde{K}$  بر حسب  $K$ . برای مقادیر بزرگ  $K$  (دماهای کم یا جفتش زیاد)،  $\tilde{K}$  کوچک (دماهای زیاد یا جفتش کم) است.

$$\begin{aligned} &= 2^{N-1} [\cosh^2(K) \tanh(K)]^{\mathcal{L}/2} Z_{LT} \\ &= 2^{N(1-\frac{z}{4})-1} [\sinh(2K)]^{\mathcal{L}/2} Z_{LT}. \end{aligned} \quad (55.4)$$

#### ۱.۴.۴ گذار فاز مدل آیزینگ روی شبکه‌ی مربعی در غیاب میدان مغناطیسی

در دمای بالا و دمای پایین تابع پارش را به صورت بسط‌هایی که ضرایب بسط تعداد خم‌هایی با محیط‌های  $l$  است، را به دست آوردیم. هنگامی که گذار فاز رخ می‌دهد تغییرات شدیدی در یکی از کمیت‌های فیزیکی رخ می‌دهد، مثلاً در تیخیر آب چگالی تقریباً ۱۰۰۰ برابر کم می‌شود. همان‌طور که دیدیم کمیت‌های فیزیکی از مشتق مرتبه‌ی اول یا بالاتر تابع پارش به دست می‌آید. اگر کمیتی فیزیکی ناپیوسته شود به این معنی است که تابع پارش یا یکی از مشتقات آن به ازای مقداری خاص از پارامتری مثلاً دما تکین می‌شود. در مقادیری که برای تابع پارش به دست آوردیم حاصل ضرب دو بخش است یک ضریب که مثلاً در دمای بالا  $2^N [\cosh(\frac{J}{kT_H})]^{\mathcal{L}}$  است که تحلیلی است و مشکلی ندارد. بنا بر این اگر چیزی بخواهد غیر تحلیلی باشد سری‌های



دوگان است  $S_L := \sum_{\ell=0} \mathcal{M}_\ell v^\ell$  و  $S_H := \sum_{\ell=0} \mathcal{N}_\ell \tau^\ell$  هستند. شبکه‌ی مربعی خود-دوگان است پس  $\mathcal{N}_\ell = \mathcal{M}_\ell$  است و برای آن  $z = 4$  و  $\mathcal{L} = 2N$  است. اگر به ازای دمای بالا مثل  $T_H$ ،  $S_H$  یا مشتقات آن تکین شود، دمای پایین مثل  $T_L$  که از (۴۷.۴) به دست می‌آید وجود دارد که  $S_H$  یا مشتقات آن تکین می‌شود. پس اگر به ازای دمای بالا گذار فاز داشته باشیم حتماً دمای پایینی هم وجود دارد که در آن دما گذار فاز رخ می‌دهد. از نتایج تجربی می‌دانیم که مدل آیزینگ دو حالتی روی شبکه‌ی مربعی یک نقطه‌ی گذار فاز دارد. این نتیجه می‌دهد که  $T_H = T_L$  است. از (۵۴.۴) نتیجه می‌شود

$$\sinh^2(2K_c) = 1, \quad \Rightarrow \quad e^{2K_c} = 1 + \sqrt{2} \quad (۵۶.۴)$$

یا

$$K_c = \frac{J}{kT_c} = \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{kT_c}{J} = \frac{2}{\ln(1 + \sqrt{2})} \approx 2.2691. \quad (۵۷.۴)$$

## مسائل

**۱.۴** در مورد ضرایب بسط دمای پایین مدل آیزینگ یک بُعدی چه می‌توانید بگویید؟  
**۲.۴** الف- یک شبکه‌ی مربعی که در هر جای‌گاه آن ذره‌ای با دو حالت  $\pm 1$  قرار دارد و بر هم‌کنش بین نزدیک‌ترین هم‌سایه‌هاست، همیلتونی  $H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j$  است. تابع پارش را در تقریب دمای بالا تا مرتبه‌ی  $\tau^8$ ، به دست آوریم. ضریب جمله‌ی  $\tau^{10}$ ، را با استدلال دقیق به دست آورید.

$$Z = [\cosh(\beta J)]^{2N} 2^N (1 + N\tau^4 + 2N\tau^6 + \frac{N(N+9)}{2}\tau^8 + 2N(N+6)\tau^{10} + \dots).$$

ب- در این تقریب انرژی آزاد را به دست آوردید. نشان دهید ضرایب توان‌های  $N^2$  و  $N^3$  در انرژی آزاد سهمی ندارند.

۳.۴ مدل آیزینگ روی شبکه‌ای مثلثی و دوره‌ای که در هر جای‌گاه آن اسپینی با دو حالت  $\pm 1$  قرار دارد و بر هم‌کنش بین نزدیک‌ترین هم‌سایه‌هاست، در نظر بگیرید

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j.$$

الف- تابع پارش را در تقریب دمای بالا تا مرتبه  $\tau^6$  به دست آورید، که

$$\tau = \tanh(\beta J) \ll 1,$$

است. انرژی آزاد را هم تا همین مرتبه محاسبه کنید و نشان دهید که فزون‌ور است. ب- تابع پارش را برای همین شبکه و همین مدل در تقریب دمای پایین تا مرتبه  $v^6$  به دست آورید، که

$$v := e^{-2\beta J} \ll 1$$

است. انرژی آزاد را هم تا همین مرتبه محاسبه کنید و نشان دهید که فزون‌ور است. ۴.۴ شبکه‌ای لانه‌زنبوری (شش ضلعی منظم)  $N$  جای‌گاه دارد و دوره‌ای است، در هر جای‌گاه آن اسپینی با دو حالت  $\pm 1$  قرار دارد و بر هم‌کنش بین نزدیک‌ترین هم‌سایه‌هاست، با همیلتونی

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j \quad (58.4)$$

در نظر بگیرید.

الف- تابع پارش را در تقریب دمای بالا تا مرتبه  $\tau^6$  به دست آورید، که

$$\tau = \tanh(\beta J) \ll 1, \quad (59.4)$$

است.

ب- انرژی آزاد را هم تا همین مرتبه محاسبه کنید و نشان دهید که فزون‌ور است.

۵.۴ روابط (۵۰.۴)–(۵۴.۴) را اثبات کنید.

# مدل هایزنبگ

## ۱.۵ مدل هایزنبگ

مدل هایزنبگ روی یک شبکه‌ی یک بعدی با همیلتونی‌ی زیر داده می‌شود

$$H = - \sum_{j=1}^{L-1} \left( J_x \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + J_y \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + J_z \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z \right) \quad (۱.۵)$$

گاهی به این مدل، مدل XYZ گفته می‌شود. در حالتی که  $J_x = J_y$  است، مدل را XXZ و در حالتی که هر سه ضریب جفت‌شدگی برابرند، مدل را XXX می‌گویند. در صورتی که میدان مغناطیسی هم داشته باشیم، باید جمله‌ی  $\sum_i \mathbf{B}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_i$  را هم به همیلتونی اضافه کنیم. اگر میدان مغناطیسی یک‌نواخت باشد، در همه‌ی جای‌گاه‌ها یکی است و  $\mathbf{B}_i = \mathbf{B}$ .

## ۲.۵ مدل آیزینگ کوانتمی با میدان مغناطیسی‌ی عرضی

شبکه‌ای یک بعدی از ذرات با اسپین 1/2 در حضور میدان مغناطیسی‌ی یک‌نواختی در نظر بگیرید. در حالتی بسیار خاص همیلتونی‌ی این سیستم

$$H = - \sum_{j=1}^N \left( J \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z + h \sigma_j^x \right) \quad (۲.۵)$$

است. گاهی به این سیستم مدل آیزینگ کوانتمی با میدان مغناطیسی عرضی گفته می‌شود. دلیل آن هم این است که این مدل به مدل آیزینگ که مدلی کلاسیکی است، مربوط است و در حالی که تنها  $J_z \neq 0$  است، میدان مغناطیسی در راستای  $x$  است. برای سادگی شرط مرزی را دوره‌ای می‌گیریم.

$$J = 0, h \neq 0 \quad ۱۰۲۰۵$$

در این حالت تابع پارش عبارت است از

$$Z = \text{Tr} e^{\beta J \sum_{i=1}^N \sigma_i^x} \quad (۳.۵)$$

در محاسبه‌ی رد کافی است از حالت‌های ویژه تابع  $\sigma^x$  یعنی

$$\sigma^x |S\rangle = S |S\rangle \quad (۴.۵)$$

که  $S = \pm 1$  است، استفاده کنیم. در این صورت

$$Z = \sum_{\{S_j = \pm 1\}} \langle S_1, S_2, \dots, S_N | e^{\beta h \sum_{j=1}^N \sigma_j^x} | S_1, S_2, \dots, S_N \rangle \quad (۵.۵)$$

$$= \sum_{\{S_j = \pm 1\}} e^{\beta h \sum_{j=1}^N S_j} \quad (۶.۵)$$

$$= \prod_j \sum_{\{S_j = \pm 1\}} e^{\beta h S_j} \quad (۷.۵)$$

$$= \{2 \cosh \beta h\}^N \quad (۸.۵)$$

که این همان تابع پارش مدل آیزینگ یک‌بعدی بدون میدان مغناطیسی است. اما می‌دانیم که این مدل گذار فاز ندارد.

$$J \neq 0, h = 0 \quad ۲۰۲۰۵$$

در این حالت تابع پارش عبارت است از

$$Z = \text{Tr} e^{\beta h \sum_{i=1}^N \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z} \quad (۹.۵)$$

در محاسبه‌ی رد کافی است از حالت‌های ویژه‌تابع  $\sigma^z$  یعنی

$$\sigma^z |S\rangle = S |S\rangle \quad (۱۰.۵)$$

که  $S = \pm 1$  است، استفاده کنیم. در این صورت

$$Z = \sum_{\{S_j = \pm 1\}} \langle S_1, S_2, \dots, S_N | e^{\beta J \sum_{j=1}^N \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z} | S_1, S_2, \dots, S_N \rangle \quad (۱۱.۵)$$

$$= \sum_{\{S_j = \pm 1\}} e^{\beta J \sum_{j=1}^N S_j S_{j+1}} \quad (۱۲.۵)$$

که این همان تابع پارش یک شبکه اسپینی بدون برهم‌کنش در حضور میدان مغناطیسی است که گذار فاز هم ندارد.

$$J \neq 0, h \neq 0 \quad ۳.۲.۵$$

### ۳.۵ تبدیل جوردن-ویگنر

عمل‌گرهای فرمیونی با جبر زیر داده می‌شوند.

$$\{a^\dagger, a\} = 1, \quad a^{\dagger 2} = a^2 = 0 \quad (۱۳.۵)$$

که  $a$  و  $a^\dagger$  عمل‌گرهای خلق و فنای فرمیونی هستند. اگر شبکه‌ای یک‌بعدی از فرمیون‌های آزاد داشته باشیم،

$$\{a_i^\dagger, a_j\} = \delta_{ij}, \quad \{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = \{a_i, a_j\} = 0 \quad (۱۴.۵)$$

که  $a_i$  و  $a_i^\dagger$  عمل‌گرهای خلق و فنای فرمیونی در جای‌گاه  $i$ ام شبکه هستند. می‌خواهیم نمایشی ماتریسی برای این عمل‌گرها را به دست آوریم. ماتریس‌های پائولی به شکل زیر تعریف می‌شوند

$$\sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (۱۵.۵)$$

این ماتریس‌ها خواص زیر را دارند

$$\{\sigma^+, \sigma^-\} = \mathbf{1}, \quad \sigma^{+2} = \sigma^{-2} = 0, \quad (۱۶.۵)$$

$$\sigma^z = 2\sigma^+\sigma^- - \mathbf{1}. \quad (۱۷.۵)$$

اگر فقط با یک فرمیون سر و کار داشتیم ممکن بود ماتریس‌های پائولی  $\sigma^+$  و  $\sigma^-$  نمایشی مناسب برای عمل‌گرهای خلق و فنا می‌بودند. با توجه به این‌که برای آن‌که نمایشی برای شبکه‌ای از فرمیون‌ها داشته باشیم، انتظار داریم فرمیون‌های در جای‌گاه‌های مختلف، خاصیت پادجابه‌جایی فرمیون‌ها را داشته باشند. اما

$$[\sigma_i^+, \sigma_j^-] = \delta_{ij}, \quad (۱۸.۵)$$

که شاخص  $i$  و  $j$  مربوط به جای‌گاه هستند و

$$A_i = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \cdots \otimes A \otimes \cdots \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \quad (۱۹.۵)$$

که  $\mathbf{1}$  ماتریس واحد  $2 \times 2$  و  $A$  در جای‌گاه  $i$  ام است. واضح است به همین شکل ساده نمی‌شود ماتریس‌های پائولی را به عنوان نمایشی از فرمیون‌ها روی یک شبکه گرفت. تبدیل

$$a_j^\dagger := \exp\left(i\pi \sum_{k=1}^{j-1} \sigma_k^+ \sigma_k^-\right) \sigma_j^+ = \sigma_j^+ \exp\left(i\pi \sum_{k=1}^{j-1} \sigma_k^+ \sigma_k^-\right) \quad (۲۰.۵)$$

$$a_j := \exp\left(-i\pi \sum_{k=1}^{j-1} \sigma_k^+ \sigma_k^-\right) \sigma_j^- = \sigma_j^- \exp\left(-i\pi \sum_{k=1}^{j-1} \sigma_k^+ \sigma_k^-\right) \quad (۲۱.۵)$$

تبدیل جوردن-ویگنر نامیده می‌شود. معکوس این تبدیل هم عبارت است از

$$\sigma_j^+ := \exp\left(i\pi \sum_{k=1}^{j-1} a_k^\dagger a_k\right) a_j^\dagger \quad (۲۲.۵)$$

$$\sigma_j^- := \exp\left(-i\pi \sum_{k=1}^{j-1} a_k^\dagger a_k\right) a_j \quad (۲۳.۵)$$

با این تعریف  $a_i$  و  $a_i^\dagger$  جبر (۱۴.۵) را برآورده می‌کنند. از دو رابطه‌ی بالا می‌توان تبدیل  $\sigma_j^x$  و  $\sigma_j^y$  را به دست آورد.

$$\sigma_j^x := \exp\left(i\pi \sum_{k=1}^{j-1} a_k^\dagger a_k\right) (a_j^\dagger + a_j) \quad (24.5)$$

$$\sigma_j^y := \exp\left(-i\pi \sum_{k=1}^{j-1} a_k^\dagger a_k\right) (-ia_j^\dagger + ia_j) \quad (25.5)$$

هر عمل‌گری با خاصیت

$$A^2 = A \quad (26.5)$$

رابطه‌ی زیر را نیز برآورده می‌کند

$$e^{\alpha A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k A^k}{k!} \quad (27.5)$$

$$= 1 + A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} = 1 + (e^\alpha - 1)A. \quad (28.5)$$

بنا بر این

$$\begin{aligned} \exp\left(\pm i\pi \sum_{k=1}^{j-1} \sigma_k^+ \sigma_k^-\right) &= \prod_{k=1}^{j-1} \exp(\pm i\sigma_k^+ \sigma_k^-) \\ &= \prod_{k=1}^{j-1} (1 - 2\sigma_k^+ \sigma_k^-) \\ &= \prod_{k=1}^{j-1} (-\sigma_k^z) \end{aligned} \quad (29.5)$$

بنا بر این تبدیل جوردن-ویگنر را به شکل زیر نیز می‌توان نوشت

$$a_j^\dagger := \prod_{k=1}^{j-1} (-\sigma_k^z) \sigma_j^+ \quad (30.5)$$

$$a_j := \prod_{k=1}^{j-1} (-\sigma_k^z) \sigma_j^- \quad (31.5)$$

علاوه بر این

$$n_k := a_k^\dagger a_k = \frac{1}{2} (1 + \sigma_k^z). \quad (32.5)$$

## ۴.۵ نمایش فرمیونی شبکه‌های اسپینی یک بعدی

مدل هایزبرگ روی یک شبکه‌ی یک بعدی با همیلتونی زیر داده می‌شود

$$H = -J \sum_{j=1}^{L-1} \left( \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z \right) \quad (۳۳.۵)$$

در حضور میدان مغناطیسی، مثلاً در راستای  $z$  جمله‌ای مثل

$$H_1 = -B \sum_{j=1}^L \sigma_j^z \quad (۳۴.۵)$$

به همیلتونی بالا اضافه می‌شود. تعمیم‌های مختلفی از مدل هایزبرگ نیز مطالعه شده‌اند. می‌خواهیم نمایشی از فرمیون‌های آزاد از این‌گونه همیلتونی‌ها به دست آوریم. بیایید جمله به جمله مساله را بررسی کنیم.

$$\begin{aligned} \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x &= (a_j^\dagger + a_j) \prod_{k=1}^{j-1} e^{i\pi a_k^\dagger a_k} \prod_{\ell=1}^j e^{i\pi a_\ell^\dagger a_\ell} (a_{j+1}^\dagger + a_{j+1}) \\ &= (a_j^\dagger + a_j) e^{i\pi a_j^\dagger a_j} (a_{j+1}^\dagger + a_{j+1}) \\ &= (a_j^\dagger + a_j) (1 - 2a_j^\dagger a_j) (a_{j+1}^\dagger + a_{j+1}) \\ &= (a_j^\dagger - a_j) (a_{j+1}^\dagger + a_{j+1}), \end{aligned} \quad (۳۵.۵)$$

و

$$\begin{aligned} \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y &= -(-a_j^\dagger + a_j) e^{i\pi a_j^\dagger a_j} (-a_{j+1}^\dagger + a_{j+1}) \\ &= -(a_j^\dagger + a_j) (a_{j+1}^\dagger - a_{j+1}). \end{aligned} \quad (۳۶.۵)$$

در این صورت

$$\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y = 2(a_j^\dagger a_{j+1} + a_{j+1}^\dagger a_j) \quad (۳۷.۵)$$

و

$$\sigma_j^z = (2a_j^\dagger a_j - 1) = (2n_j - 1), \quad (۳۸.۵)$$



$$\begin{aligned}\sigma_j^z \sigma_{j+1}^z &= (2a_j^\dagger a_j - 1)(2a_{j+1}^\dagger a_{j+1} - 1) \\ &= (2n_j - 1)(2n_{j+1} - 1) \\ &= 4n_j n_{j+1} - 2(n_{j+1} - n_j) + 1.\end{aligned}\quad (39.5)$$

بنا بر این جمله‌های  $\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x$  و  $\sigma_j^y \sigma_{j+1}^y$  مرتبه‌ی ۲ از عمل‌گرهای خلق و فناي فرمیونی هستند اما  $\sigma_j^z \sigma_{j+1}^z$  تا مرتبه‌ی ۴ از عمل‌گرهای خلق و فناي فرمیونی است.

### ۱.۴.۵ مثال - مدل آیزینگ کوانتمی با میدان مغناطیسی عرضی

به عنوان مثال کاربردی از تبدیل جوردن-ویگنر را برای مدلی که گاهی مدل آیزینگ کوانتمی با میدان مغناطیسی عرضی نامیده می‌شود را با شرط مرزی دوره‌ای در نظر می‌گیریم

$$H = -J \sum_{j=-L}^L \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x - B \sum_{j=-L}^L \sigma_j^z \quad (40.5)$$

با تبدیل جوردن-ویگنر

$$\begin{aligned}\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x &= (a_j^\dagger - a_j)(a_{j+1}^\dagger + a_{j+1}), \\ \sigma_j^z &= (2a_j^\dagger a_j - 1),\end{aligned}\quad (41.5)$$

همیلتونی به شکل زیر در می‌آید

$$\begin{aligned}H &= -J \sum_{j=-L}^L (a_j^\dagger - a_j)(a_{j+1}^\dagger + a_{j+1}) - B \sum_{j=-L}^L (2a_j^\dagger a_j - 1) \\ &= -J \sum_{j=-L}^L (a_j^\dagger a_{j+1} + a_{j+1}^\dagger a_j + a_j^\dagger a_{j+1}^\dagger + a_{j+1} a_j) \\ &\quad - 2B \sum_{j=-L}^L a_j^\dagger a_j + B(2L + 1).\end{aligned}\quad (42.5)$$

فرمیون‌های جای‌گاه‌های مجاور جفت شده‌اند. برای آن‌که ویژه‌مقادیر این همیلتونی را به دست

آوریم از تبدیل فوریه‌ی زیر استفاده می‌کنیم

$$a_j^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2L+1}} \sum_{k=-L}^L e^{\frac{2\pi i j k}{2L+1}} b_k^\dagger, \quad (۴۳.۵)$$

$$a_j = \frac{1}{\sqrt{2L+1}} \sum_{k=-L}^L e^{-\frac{2\pi i j k}{2L+1}} b_k, \quad (۴۴.۵)$$

که عکس آن عبارت است از

$$b_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2L+1}} \sum_{j=-L}^L e^{-\frac{2\pi i j k}{2L+1}} a_j^\dagger, \quad (۴۵.۵)$$

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{2L+1}} \sum_{j=-L}^L e^{\frac{2\pi i j k}{2L+1}} a_j, \quad (۴۶.۵)$$

توجه داریم که

$$\frac{1}{2L+1} \sum_{j=-L}^L e^{\pm \frac{2\pi i j (k-k')}{2L+1}} = \delta_{k,k'}. \quad (۴۷.۵)$$

می‌توان نشان داد که  $b_k$  و  $b_k^\dagger$  عملگرهای فرمیونی هستند و در روابط جبری زیر صدق می‌کنند

$$\{b_k^\dagger, b_{k'}\} = \delta_{kk'}, \quad \{b_k^\dagger, b_{k'}^\dagger\} = \{b_k, b_{k'}\} = 0 \quad (۴۸.۵)$$

حالا بیاییم جمله به جمله‌ی همیلتونی را محاسبه کنیم

$$\begin{aligned} \sum_{j=-L}^L a_j^\dagger a_{j+1} &= \frac{1}{2L+1} \sum_{j,m,k=-L}^L e^{\frac{2\pi i j k}{2L+1}} e^{-\frac{2\pi i (j+1)m}{2L+1}} b_k^\dagger b_m \\ &= \sum_{m,k=-L}^L e^{-\frac{2\pi i m}{2L+1}} \delta_{m,k} b_k^\dagger b_m \\ &= \sum_{k=-L}^L e^{-\frac{2\pi i k}{2L+1}} b_k^\dagger b_k \end{aligned} \quad (۴۹.۵)$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=-L}^L a_{j+1}^\dagger a_j &= \frac{1}{2L+1} \sum_{j,m,k=-L}^L e^{\frac{2\pi i(j+1)k}{2L+1}} e^{-\frac{2\pi ijm}{2L+1}} b_k^\dagger b_m \\
 &= \sum_{m,k=-L}^L e^{\frac{2\pi ik}{2L+1}} \delta_{m,k} b_k^\dagger b_m \\
 &= \sum_{k=-L}^L e^{\frac{2\pi ik}{2L+1}} b_k^\dagger b_k
 \end{aligned} \tag{۵۰.۵}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=-L}^L a_j^\dagger a_j &= \sum_{j,m,k=-L}^L e^{\frac{2\pi ijk}{2L+1}} e^{-\frac{2\pi ijm}{2L+1}} b_k^\dagger b_m \\
 &= \sum_{m,k=-L}^L \delta_{m,k} b_k^\dagger b_m \\
 &= \sum_{k=-L}^L b_k^\dagger b_k
 \end{aligned} \tag{۵۱.۵}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=-L}^L a_{j+1}^\dagger a_j^\dagger &= \frac{1}{2L+1} \sum_{j,m,k=-L}^L e^{\frac{2\pi i(j+1)k}{2L+1}} e^{\frac{2\pi ijm}{2L+1}} b_k^\dagger b_m^\dagger \\
 &= \sum_{m,k=-L}^L e^{\frac{2\pi ik}{2L+1}} \delta_{m,-k} b_k^\dagger b_m^\dagger = \sum_{k=-L}^L e^{\frac{2\pi ik}{2L+1}} b_k^\dagger b_{-k}^\dagger \\
 &= \sum_{k=1}^L e^{\frac{2\pi ik}{2L+1}} b_k^\dagger b_{-k}^\dagger + \sum_{k=-1}^{-L} e^{\frac{2\pi ik}{2L+1}} b_k^\dagger b_{-k}^\dagger \\
 &= \sum_{k=1}^L e^{\frac{2\pi ik}{2L+1}} b_k^\dagger b_{-k}^\dagger + \sum_{k=1}^L e^{-\frac{2\pi ik}{2L+1}} b_{-k}^\dagger b_k^\dagger \\
 &= \sum_{k=1}^L \left( e^{\frac{2\pi ik}{2L+1}} - e^{-\frac{2\pi ik}{2L+1}} \right) b_k^\dagger b_{-k}^\dagger \\
 &= \sum_{k=1}^L 2i \sin \left( \frac{2\pi k}{2L+1} \right) b_k^\dagger b_{-k}^\dagger
 \end{aligned} \tag{۵۲.۵}$$

در این جا از  $b_0^\dagger b_0^\dagger = 0$  استفاده کرده ایم.

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=-L}^L a_{j+1} a_j &= \frac{1}{2L+1} \sum_{j,m,k=-L}^L e^{-\frac{2\pi i(j+1)k}{2L+1}} e^{-\frac{2\pi ijm}{2L+1}} b_k b_m \\
 &= \sum_{m,k=-L}^L e^{-\frac{2\pi ik}{2L+1}} \delta_{m,-k} b_k b_m \\
 &= \sum_{k=-L}^L e^{-\frac{2\pi ik}{2L+1}} b_k b_{-k} \\
 &= \sum_{k=1}^L e^{-\frac{2\pi ik}{2L+1}} b_k b_{-k} + \sum_{k=-1}^{-L} e^{-\frac{2\pi ik}{2L+1}} b_k b_{-k} \\
 &= \sum_{k=1}^L e^{-\frac{2\pi ik}{2L+1}} b_k b_{-k} + \sum_{k=1}^L e^{\frac{2\pi ik}{2L+1}} b_{-k} b_k \\
 &= - \sum_{k=1}^L \left( e^{\frac{2\pi ik}{2L+1}} - e^{-\frac{2\pi ik}{2L+1}} \right) b_k b_{-k} \\
 &= - \sum_{k=1}^L 2i \sin \left( \frac{2\pi k}{2L+1} \right) b_k b_{-k} \tag{۵۳.۵}
 \end{aligned}$$

در این جا از  $b_0 b_0 = 0$  استفاده کرده ایم. با در نظر گرفتن همه‌ی این‌ها همیلتونی به شکل زیر در می‌آید

$$\begin{aligned}
 H &= -2 \sum_{k=-L}^L \left[ J \cos \left( \frac{2\pi k}{2L+1} \right) + B \right] b_k^\dagger b_k \\
 &\quad - \sum_{k=1}^L 2iJ \sin \left( \frac{2\pi k}{2L+1} \right) \left( b_k^\dagger b_{-k}^\dagger + b_k b_{-k} \right) + B(2L+1) \\
 &= -2 \sum_{k=1}^L \left[ J \cos \left( \frac{2\pi k}{2L+1} \right) + B \right] \left( b_k^\dagger b_k + b_{-k}^\dagger b_{-k} \right) - 2(J+B)b_0^\dagger b_0 \\
 &\quad + 2iJ \sum_{k=1}^L \sin \left( \frac{2\pi k}{2L+1} \right) \left( b_k^\dagger b_{-k}^\dagger + b_k b_{-k} \right) + B(2L+1) \tag{۵۴.۵}
 \end{aligned}$$

در این جا از  $b_0 b_0^\dagger + b_0^\dagger b_0 = 1$  استفاده کرده‌ایم. این همیلتونی شامل یک بخش ثابت است که فقط باعث یک انتقال در طیف انرژی می‌شود. آن را کنار می‌گذاریم. با کنار گذاشتن این بخش ثابت همیلتونی را به شکل زیر می‌نویسیم

$$H = \sum_{k=1}^L \left[ \mathcal{A}_k (b_k^\dagger b_k + b_{-k}^\dagger b_{-k}) + \mathcal{B}_k (b_k^\dagger b_{-k}^\dagger + b_k b_{-k}) \right] + \mathcal{E}_0 b_0^\dagger b_0. \quad (55.5)$$

که

$$\mathcal{A}_k := -2J \cos\left(\frac{2\pi k}{2L+1}\right) - 2B \quad (56.5)$$

$$\mathcal{B}_k := 2iJ \sin\left(\frac{2\pi k}{2L+1}\right) \quad (57.5)$$

$$\mathcal{E}_0 := -2(J+B) \quad (58.5)$$

این همیلتونی هنوز قطری نیست ولی بلوکه قطری است. برای قطری کردن آن باید تغییر متغیر دهیم. گاهی این قطری کردن را تبدیلات بوگولیووف<sup>۱</sup> هم می‌گویند. در این صورت به رابطه‌ای مثل

$$H = \sum_{k=-L}^L \mathcal{E}_k \eta_k^\dagger \eta_k. \quad (59.5)$$

توجه داریم که

$$\eta_0 = b_0,$$

$$\eta_0^\dagger = b_0^\dagger$$

$$\mathcal{E}_0 = -2(J+B). \quad (60.5)$$

همیلتونی را می‌توان به فرم زیر نوشت

$$H = \begin{pmatrix} b_k^\dagger & b_{-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A}_k & \mathcal{B}_k \\ -\mathcal{B}_k & -\mathcal{A}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_k \\ b_{-k}^\dagger \end{pmatrix} + \mathcal{E}_0 b_0^\dagger b_0$$

transformations Bogoliubov<sup>۱</sup>

$$= \begin{pmatrix} b_k^\dagger & b_{-k} \end{pmatrix} \mathcal{M} \begin{pmatrix} b_k \\ b_{-k}^\dagger \end{pmatrix} + \mathcal{E}_0 b_0^\dagger b_0 \quad (۶۱.۵)$$

باید ماتریس  $\mathcal{M}$  را قطری کنیم. ویژه مقادیر آن

$$\mathcal{E}_k = -2\sqrt{\mathcal{A}_k^2 - \mathcal{B}_k^2} = -2\sqrt{J^2 + B^2 + 2JB \cos\left(\frac{2\pi k}{2L+1}\right)} \quad (۶۲.۵)$$

است.

### ۲۰۴.۵ مثال - مدل $XX$ با میدان مغناطیسی عرضی

به عنوان مثال دیگر کاربردی از تبدیل جوردن-ویگنر را برای مدلی که گاهی مدل  $XX$  با میدان مغناطیسی عرضی نامیده می شود را در نظر بگیریم. همیلتونی این مدل با شرط مرزی دوره‌ای

$$H = -J \sum_{j=-L}^L \left( \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y \right) - B \sum_{j=-L}^L \sigma_j^z \quad (۶۳.۵)$$

است. که با تبدیل جوردن-ویگنر می‌رسیم به

$$H = -2 \sum_{j=-L}^L \left( a_j^\dagger a_{j+1} + a_{j+1}^\dagger a_j \right) - B \sum_{j=-L}^L \left( 2a_j^\dagger a_j - 1 \right) \quad (۶۴.۵)$$

در این همیلتونی میدان‌های فرمیونی جای‌گاه‌های مجاور جفت شده‌اند. حالا بیاییم جمله به جمله همیلتونی را محاسبه کنیم

$$\sum_{j=-L}^L a_j^\dagger a_{j+1} = \sum_{k=-L}^L e^{-\frac{2\pi i k}{2L+1}} b_k^\dagger b_k \quad (۶۵.۵)$$

$$\sum_{j=-L}^L a_{j+1}^\dagger a_j = \sum_{k=-L}^L e^{\frac{2\pi i k}{2L+1}} b_k^\dagger b_k \quad (۶۶.۵)$$

$$\sum_{j=-L}^L a_j^\dagger a_j = \sum_{k=-L}^L b_k^\dagger b_k \quad (۶۷.۵)$$

با استفاده از این‌ها همیلتونی تبدیل می‌شود به

$$\begin{aligned}
 H &= \sum_{k=-L}^L \left[ -4J \cos \left( \frac{2\pi k}{2L+1} \right) - 2B \right] b_k^\dagger b_k + B(2L+1) \\
 &=: \sum_{k=-L}^L \epsilon_k \mathcal{N}_k + B(2L+1) \quad (۶۸.۵)
 \end{aligned}$$

که

$$\epsilon_k := -4J \cos \left( \frac{2\pi k}{2L+1} \right) - 2B \quad (۶۹.۵)$$

$$\mathcal{N}_k := b_k^\dagger b_k \quad (۷۰.۵)$$

است و همیلتونی  $H$  جمع تعدادی همیلتونی جفت‌نشده  $\epsilon_k \mathcal{N}_k$  است. ویژه‌تابع‌های همیلتونی را می‌توانیم بر اساس ویژه‌تابع‌های عمل‌گرهای  $\mathcal{N}_k$  بنویسیم. تابع پارش چنین سیستمی عبارت است از

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z} &= \sum_{\{E\}} e^{-\beta E} \\
 &= \sum_{\{n_k\}} e^{-\sum_k \beta \epsilon_k n_k} \\
 &= \prod_k \left( 1 + e^{-\beta \epsilon_k} \right), \quad (۷۱.۵)
 \end{aligned}$$

و انرژی آزاد

$$F = -KT \ln \mathcal{Z} = -\gamma = -\frac{1}{\beta} \sum_k \ln \left( 1 + e^{-\beta \epsilon_k} \right), \quad (۷۲.۵)$$

با تعریف

$$\kappa := \frac{2\pi k}{2L+1} \quad (۷۳.۵)$$

و در حد ترمودینامیکی می‌رسیم به

$$\epsilon_k = -4J \cos \kappa - 2B,$$

$$F = -\frac{1}{\beta} \int_{-\pi}^{\pi} d\kappa \ln(1 + e^{-\beta\epsilon_k}) \quad (۷۴.۵)$$

## مسائل

**۱۰.۵ الف** - تابع پارش مدل آیزینگ برای ذراتی با اسپین ۲/۱ به طوری که  $S_i \in \{-1, +1\}$  است، با ضریب جفت شدگی  $J > 0$  و دمای  $T$  روی یک شبکه‌ی مثلثی را در حد دماهای بالا تا مرتبه‌ی ۶ از  $\tanh(J/KT)$  به دست آورید.

**ب** - تابع پارش مدل آیزینگ روی یک شبکه‌ی مثلثی را در حد دماهای پایین تا مرتبه‌ی ۴ از  $\exp[-2J/KT]$  به دست آورید.

**ج** - تابع پارش مدل آیزینگ با ضریب جفت شدگی  $J > 0$  و دمای  $T$  روی یک شبکه‌ی شش ضلعی را در حد دماهای بالا تا مرتبه‌ی ۱۰ از  $\tanh(J/KT)$  به دست آورید.

**د** - تابع پارش مدل آیزینگ روی یک شبکه‌ی شش ضلعی را در حد دماهای پایین تا مرتبه‌ی ۴ از  $\exp[-2J/KT]$  به دست آورید.

**۲۰.۵ الف** - با استفاده از تابع پارشی که در مساله قبل برای مدل آیزینگ با ضریب جفت شدگی  $J$  و دمای  $T$  روی یک شبکه‌ی مثلثی در حد دمای بالا به دست آورده‌اید، انرژی آزاد را به دست آورید. نشان دهید این انرژی فزون‌ور است، یعنی مرتبه‌های خطی از  $N$  باقی می‌مانند و مرتبه‌های بالاتر  $N$  هم‌دیگر را حذف می‌کنند.

**ب** - تابع هم‌بستگی‌ی اسپین‌های مجاور را در حد دمای بالا به دست آورید.

**۳۰.۵** مدل آیزینگ کوانتمی با میدان مغناطیسی‌ی عرضی با همیلتونی‌ی زیر را در نظر بگیرید.

$$H = - \sum_{j=-L}^L \left( J_x \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + J_y \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y \right) - B \sum_{j=-L}^L \sigma_j^z$$

شکل تبدیل یافته‌ی همیلتونی‌ی بالا تحت تبدیل جوردن-ویگنر

$$a_j^\dagger := \exp \left( i\pi \sum_{k=1}^{j-1} \sigma_k^+ \sigma_k^- \right) \sigma_j^+ = \sigma_j^+ \exp \left( i\pi \sum_{k=1}^{j-1} \sigma_k^+ \sigma_k^- \right)$$

<https://www.youtube.com/@amiraghamohammadi>

<https://staff.alzahra.ac.ir/aghahammadi>



$$a_j := \exp\left(-i\pi \sum_{k=1}^{j-1} \sigma_k^+ \sigma_k^-\right) \sigma_j^- = \sigma_j^- \exp\left(-i\pi \sum_{k=1}^{j-1} \sigma_k^+ \sigma_k^-\right)$$

را به دست آورید. در این جا  $a^\dagger$  و  $a$  عمل‌گرهای خلق و فنای فرمیونی هستند.

$$\{a_i^\dagger, a_j\} = \delta_{ij}, \quad \{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = \{a_i, a_j\} = 0$$



## مدل لاندائو-گینزبرگ

### ۱.۶ مدل لاندائو-گینزبرگ

در فصل‌های قبل گذارِ فاز در بعضی از سیستم‌های ساده را بررسی کردیم. در این مدل‌ها یک همیلتونی میکروسکوپیک برای توصیف برهم‌کنش ذرات درون سیستم نوشتیم. در بعضی از این مدل‌ها با روش‌های دقیق و در بعضی دیگر با روش‌های تقریبی مثل روش میدان میان‌گین کمیت‌های فیزیکی مثل مغناطش را به دست آوردیم. این مدل‌ها گسسته و کمیتی که به هر جایگاه نسبت می‌دادیم مثلاً اسپین،  $S_i$ ، مقادیری گسسته انتخاب می‌کرد. تابع پارش چیزی است مثل

$$Z = \text{Tr}[e^{-\beta H}]. \quad (۱.۶)$$

اگر در مقیاس درشت‌تری به سیستم نگاه کنیم شبکه گسسته به محیطی پیوستار تبدیل می‌شود و مغناطش  $m(x)$  نیز کمیتی پیوسته از مکان می‌شود. هرچند در حد میکروسکوپی  $S_i$  تغییرات شدیدی دارد، مثلاً برای سیستم دو حالتی می‌تواند مقادیر  $\pm 1$  بگیرد، ولی وقتی در مقیاس بزرگ‌تری به سیستم نگاه کنیم، مثلاً 100 جایگاه، مقداری که به اسپین متوسط این مجموعه نسبت می‌دهیم، یکی از مقادیر  $-1, 0.98, 0.96, \dots$  است. در مقیاس‌های بزرگ‌تر تقریب

پیوستار تقریب بهتری می‌شود. در این تقریب

$$\sum_i \Rightarrow \int d^N x \quad (۲.۶)$$

$$\sum_{\{S_i\}} \Rightarrow \int D\Phi \quad (۳.۶)$$

که  $N$  بعد شبکه و انتگرال  $\int D\Phi$  یک انتگرال تابعی<sup>۱</sup> است، که جمع روی تمام توابع ممکن  $\Phi(x)$  است. همیلتونی سیستم میکروسکوپی به

$$\beta H(\{S_i\}) = \beta \sum_i \mathcal{H}_i \Rightarrow L[\Phi(x)] = \int d^N x \mathcal{L}(\Phi(x)) \quad (۴.۶)$$

و تابع پارش به

$$(۵.۶)$$

$$Z = \text{Tr}[e^{-\beta H}] \Rightarrow \int D\Phi \exp(-L[\Phi(x)]) = \int D\Phi \exp\left(-\int d^N x \mathcal{L}(\Phi(x))\right)$$

تبدیل می‌شوند. این تبدیل‌ها جز در موارد خاص به سادگی و مستقیم قابل محاسبه نیستند ولی گاهی راه‌های دیگری هم وجود دارد. ممکن است مدل‌های میکروسکوپی تقارن‌هایی داشته باشند. مثلاً همیلتونی مدل آیزینگ و تابع پارش مربوط به آن تحت تبدیل  $S_i \rightarrow -S_i$  عوض نمی‌شود. یک نوع نگاه دیگر به این مساله نوشتن مدل‌هایی پیوسته است که همان تقارن‌ها را داشته باشند، یعنی مثلاً تحت تبدیل  $m(x) \rightarrow -m(x)$  همیلتونی عوض نشود. کلی‌ترین همیلتونی که چنین خاصیتی داشته باشد

$$\beta \mathcal{H} = \int d^N x [a_0(T) + a_2(T)\Phi^2(x) + a_4(T)\Phi^4(x) + \dots] \quad (۶.۶)$$

$$+ b_2 |\nabla \Phi|^2 + \dots + c_4 \Phi^2 |\nabla \Phi|^2 + \dots] \quad (۷.۶)$$

البته این مدل تحت هر دورانی در فضا ناوردا است. با در نظر گرفتن مشتقات مرتبه‌های بالاتر و توانهای بالاتر نظریه غیرموضعی می‌شود. برای داشتن یک نظریه موضعی باید تعداد محدودی از

جملات بالا را در نظر بگیریم. چنین مدلی را مدل لاندائو-گینزبرگ<sup>۱</sup> می‌نامند. با توجه به این‌که احتمال این‌که سیستم در آرایش  $\Phi$  باشد

$$P = \frac{\exp(-L[\Phi])}{Z} \quad (۸.۶)$$

است، می‌توانیم اطلاعاتی در مورد ضرایبی که در  $L$  ظاهر می‌شوند به دست آوریم. مثلاً ضریب بزرگ‌ترین توانی از  $\Phi$  که در  $P$  ظاهر می‌شود، باید حتماً مثبت باشد. در غیر این صورت احتمال آرایش‌های  $\Phi$  بزرگ‌تر، بیش‌تر است و نمی‌توان احتمال بهنجاری داشت. یا  $b_2$  ضریب  $|\nabla\Phi|^2$  هم باید مثبت باشد، زیرا در غیر این صورت آرایش‌هایی با تغییرات شدیدتر محتمل‌تر هستند. این در حالی است که ما انتظار داریم در مقیاس‌های بزرگ‌تر با آرایش‌های هم‌وارتری سروکار داشته باشیم. در ضمن این ضرایب توابعی از دما هستند. با توجه به این‌که در همیلتونی میکروسکوپی ضرایب کمیت‌های خوش‌رفتاری بودند، انتظار نداریم با دانه‌درشت کردن این ضرایب بدرفتار شوند. بنا بر این انتظار این است که این ضرایب توابعی تحلیلی از دما باشند. در واقع در حالت میکروسکوپی بستگی به دما به صورت  $1/(kT)$  است، ولی با دانه‌درشت کردن ممکن است توابع پیچیده‌تری از دما باشند. ساده‌ترین حالت این است که به مدلی با جملات زیر بسنده کنیم.

$$\mathcal{L} = a_0(T) + a_2(T)\Phi^2(x) + a_4(T)\Phi^4(x) + b_2|\nabla\Phi|^2. \quad (۹.۶)$$

در این صورت  $a_4$  و  $b_2$  باید مثبت باشند. همواره می‌توانیم با مقیاس‌کردن  $\Phi$ ، ضریب  $b_2$  را یک کنیم. اگر بخواهیم همان‌گونه که به مدل آیزینگ میدان مغناطیسی اضافه می‌کردیم، عمل کنیم کافی است جمله‌ای مثل  $h \cdot \Phi$  هم اضافه کنیم. البته این جمله طبیعتاً تقارن  $m(x) \rightarrow -m(x)$  را می‌شکند. در این صورت

$$\mathcal{L} = a_0(T) + a_2(T)\Phi^2(x) + a_4(T)\Phi^4(x) + |\nabla\Phi|^2 - h \cdot \Phi. \quad (۱۰.۶)$$

ساده‌ترین محاسبه مربوط به محاسبه جمله‌ی  $a_0(T)$  در  $L$  است، که

$$\int d^N x a_0(T) = Va_0(T) \quad (۱۱.۶)$$

<sup>۱</sup>Landau-Ginzburg

می‌شود.  $V$  حجم سیستم است. این بخش را می‌توانیم جدا کنیم. بقیه جملات در  $\mathcal{L}$  را به دو بخش که یکی شامل مشتقات  $\Phi(x)$  و دیگری  $\Psi(\Phi)$  تابعی از آن است تقسیم می‌کنیم

$$\Psi(\Phi) = a_2\Phi^2 + a_4\Phi^4 - h \cdot \Phi. \quad (۱۲.۶)$$

یک تقریب این است که در محاسبه‌ی تابع پارش مهم‌ترین سهم را در نظر بگیریم. مهم‌ترین سهم را محتمل‌ترین جمله دارد. یعنی نمای تابع نمایی بزرگ‌ترین مقدار باشد. با در نظر گرفتن این که جمله‌ی  $|\nabla\Phi|^2$  برای هر تابعی (چه در ناحیه صعودی و چه در ناحیه نزولی آن) مثبت است، سهمی مثبت در انرژی دارد. اما به خاطر ضریب منفی در نما، سهمش در نمای تابع نمایی منفی است، و احتمال تابعی با تغییرات بیش‌تر را کم می‌کند. پس در این تقریب کافی است جوابی انتخاب کنیم که ثابت باشد تا این جمله صفر باشد و آرایشی را بگیریم که کوچک‌ترین  $\Psi$  یعنی  $\Psi_{\min}$  را بدهد. کافی است برای یک جواب برداری برای  $\Phi$  آن را در راستای میدان مغناطیسی بگیریم و

$$\left. \frac{d\Psi}{d\Phi} \right|_{\Phi=m} = 2a_2m + 4a_4m^3 - h = 0. \quad (۱۳.۶)$$

ابتدا فرض کنیم  $a_4 = 0$  باشد. در این صورت  $\Phi^2$  بزرگ‌ترین توان  $\phi$  را دارد. پس  $a_2 > 0$  است. سه حالت مختلف را جدا بررسی کنیم.

•  $h = 0$ . این معادله یک جواب بدیهی‌ی  $m_1 = 0$  دارد.  $\Psi$  بر حسب  $\Phi$  به ازای  $h = 0$  یک سهمی است و

$$\left. \frac{d^2\Psi}{d\Phi^2} \right|_{\Phi=0} = 2a_2 > 0 \quad (۱۴.۶)$$

و نقطه‌ی  $m_1 = 0$  کمینه است. یعنی در غیاب میدان مغناطیسی خارجی، مغناطش متوسط صفر است.

•  $h > 0$ . این معادله یک جواب دارد،  $m_2 = \frac{h}{2a_2} > 0$ .  $\Psi$  بر حسب  $\Phi$  به ازای  $h > 0$  هم یک سهمی است و

$$\left. \frac{d^2\Psi}{d\Phi^2} \right|_{\Phi=m_2} = 2a_2 > 0 \quad (۱۵.۶)$$

و نقطه‌ی  $m_2 > 0$  کمینه است. توجه داریم که در  $\Phi = 0$  شیب این منحنی

$$\left. \frac{d\Psi}{d\Phi} \right|_{\Phi=0} = -h < 0. \quad (۱۶.۶)$$

منحنی سبز رنگ در شکل (۱۰.۶) را ببینید. یعنی در حضور میدان مغناطیسی خارجی  $h > 0$ ، مغناطش متوسط هم‌راستا با آن  $m > 0$  است.

•  $h < 0$ . این معادله یک جواب دارد،  $m_3 = \frac{h}{2a_2} < 0$  بر حسب  $\Phi$  به ازای  $h < 0$  هم یک سهمی است و

$$\left. \frac{d^2\Psi}{d\Phi^2} \right|_{\Phi=m_3} = 2a_2 > 0 \quad (۱۷.۶)$$

و نقطه‌ی  $m_3 < 0$  کمینه است. توجه داریم که در  $\Phi = 0$  شیب این منحنی

$$\left. \frac{d\Psi}{d\Phi} \right|_{\Phi=0} = -h > 0. \quad (۱۸.۶)$$

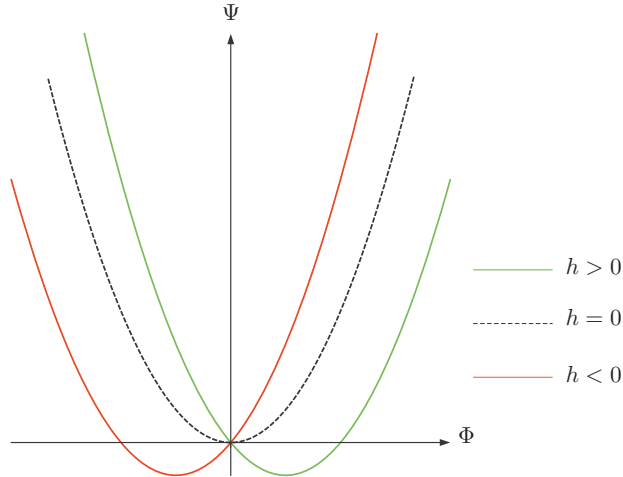
منحنی قرمز رنگ در شکل (۱۰.۶) را ببینید. یعنی در حضور میدان مغناطیسی خارجی  $h < 0$ ، مغناطش متوسط هم‌راستا با آن  $m < 0$  است.

حالا بیایید حالتی را در نظر بگیریم که  $a_4 \neq 0$  است. در این صورت  $a_4$  باید حتما مثبت باشد و  $a_2$  می‌تواند مثبت یا منفی باشد. ابتدا فرض کنیم  $a_2 > 0$  است. برای به دست آوردن نقطه یا نقاط کمینه باید معادله‌های

$$\begin{aligned} \Psi' &= 2a_2m + 4a_4m^3 - h = 0 \\ \Psi'' &= 2a_2 + 12a_4m^2 > 0. \end{aligned} \quad (۱۹.۶)$$

را حل کنیم. معادله‌ی اول درجه‌ی ۳ است و علی‌الاصول سه جواب می‌تواند داشته باشد. اما معادله‌ی دوم با توجه به  $a_2, a_4 > 0$ ، هم‌واره برقرار است، یعنی همه‌ی جواب‌ها کمینه هستند. اما چنین چیزی امکان ندارد زیرا هر کمینه باید بین دو بیشینه باشد. با در نظر گرفتن این که

$$\lim_{\Phi \rightarrow \pm\infty} \Psi \rightarrow \infty, \quad (۲۰.۶)$$

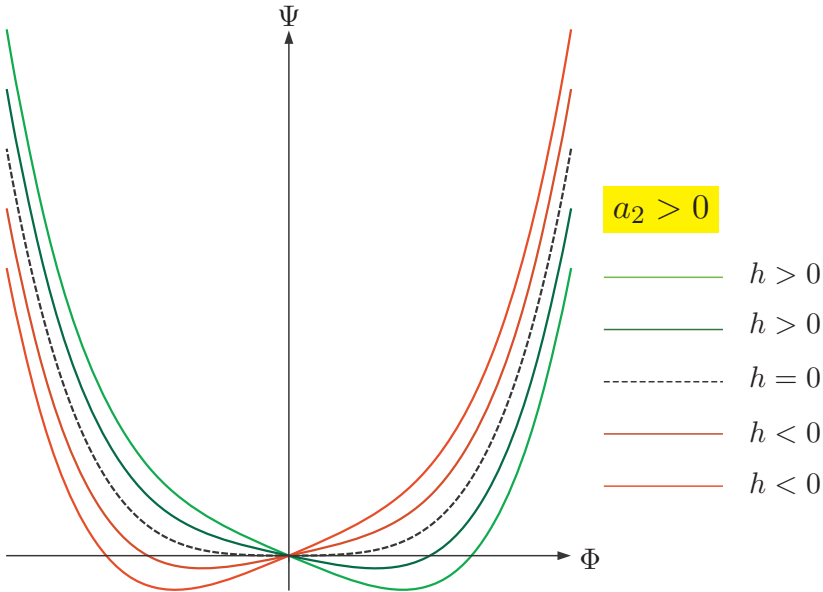


شکل ۱۰۶ منحنی  $\Psi$  بر حسب  $\Phi$  به ازای  $h = 0$  (منحنی نقطه‌چین)،  $h > 0$  (منحنی سبزرنگ)، و  $h < 0$  (منحنی قرمز رنگ).

است،  $\Psi$  تنها یک کمینه دارد. در ضمن توجه داشته باشید که  $\Psi'(0) = -h$  است. یعنی برای  $h > 0$  کمینه  $\Psi$  به ازای مقداری مثبت برای  $m$  و برای  $h < 0$  کمینه  $\Psi$  به ازای مقداری منفی برای  $m$  است. منحنی تغییرات  $\Psi$  بر حسب  $\Phi$  شکل (۲.۶) می‌شود که به طور کیفی شبیه شکل (۱.۶) است و نتایج فیزیکی‌اش نیز شبیه آن است. با تغییر پیوسته میدان مغناطیسی منحنی سبزرنگ به طور پیوسته به تدریج به منحنی قرمز رنگ تبدیل می‌شود و مغناطش متوسط در کمینه  $\Psi(\Phi)$  به طور پیوسته از مقداری مثبت از مغناطش صفر عبور کرده و به مقداری منفی برای مغناطش می‌رسد.

اگر  $a_2 < 0$  باشد، با توجه به این‌که در حد  $\Phi$  بزرگ  $\Psi$  هم بزرگ می‌شود و  $\Psi'$  می‌تواند حداکثر در سه نقطه صفر شود، اگر سه جواب داشت حتماً یکی از آن‌ها بیشینه و دو تای دیگر کمینه هستند و در صورتی که یک جواب داشت آن جواب حتماً کمینه است.  $\Psi$  بر حسب  $\Phi$  چیزی شبیه شکل (۳.۶) می‌شود. در حالتی که  $h = 0$  است دو کمینه برابری برای هر یک از میدان‌های مثبت یا منفی وجود دارد که در هر مورد یکی از آن‌ها کمینه مطلق است





شکل ۲.۶ منحنی  $\Psi$  بر حسب  $\Phi$  به ازای  $h = 0$  (منحنی نقطه‌چین)،  $h > 0$  (منحنی‌های سبزرنگ)، و  $h < 0$  (منحنی‌های قرمز رنگ).

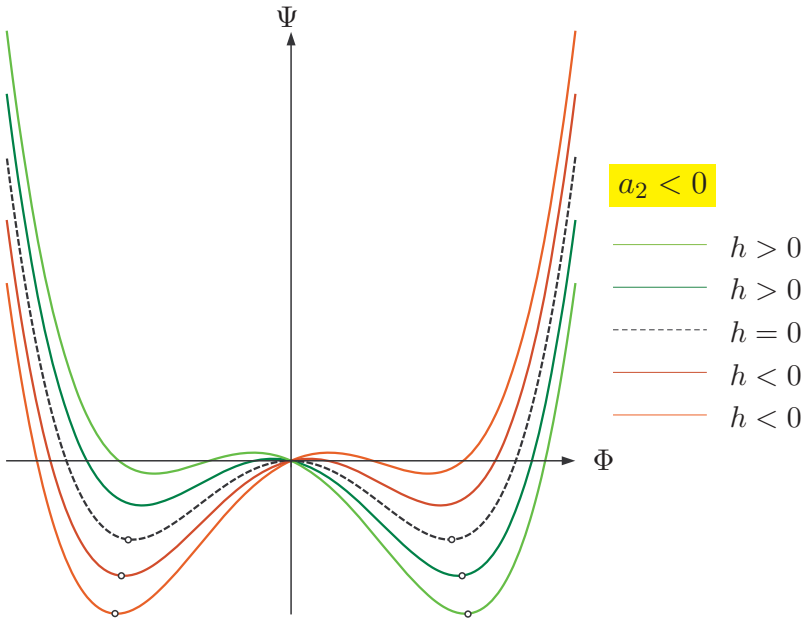
که در شکل با  $\circ$  نمایش داده شده‌اند. با تغییر پیوسته‌ی میدان مغناطیسی منحنی سبزرنگ به طور پیوسته و به تدریج تغییر می‌کند ولی هم‌واره کمینه‌ی مطلق مثبت است و همین طور با تغییر پیوسته‌ی میدان مغناطیسی منحنی قرمز رنگ به طور پیوسته و به تدریج تغییر می‌کند ولی هم‌واره کمینه‌ی مطلق منفی است. همان‌طور که می‌بینیم چیزی که بین دو شکل (۲.۶) و (۳.۶) فرق می‌گذارد، مثبت یا منفی بودن  $a_2$  است. از آن‌جا که  $a_2$  تابعی تحلیلی از دما است در نزدیکی دمای بحرانی

$$a_2(T) = a_2^{(0)} + a_2^{(1)}(T - T_c) + \dots \quad (21.6)$$

و نقطه‌ی  $a_2 = 0$  نقطه‌ی جدایی‌ی بین دو فاز است، سازگاری این دو نتیجه می‌دهد

$$a_2^{(0)} = 0, \quad a_2^{(1)} > 0 \quad (22.6)$$

است. در این صورت شکل (۲.۶) برای  $T > T_c$  و شکل (۳.۶) برای  $T < T_c$  است.



شکل ۳.۶ منحنی  $\Psi$  بر حسب  $\Phi$  به ازای  $h = 0$  (منحنی نقطه‌چین)،  $h > 0$  (منحنی‌های سبزرنگ)، و  $h < 0$  (منحنی‌های قرمز رنگ). در حالتی که  $h = 0$  است دو کمینه برابرند ولی برای هر یک از میدان‌های مثبت یا منفی دو کمینه وجود دارد که در هر مورد یکی از آن‌ها کمینه مطلق است که در شکل با  $\circ$  نمایش داده شده است.

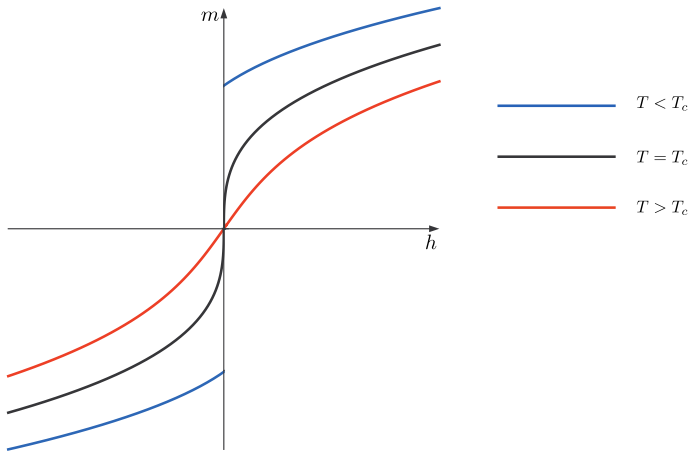
کمینه‌های  $\Psi$  از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$2a_2m + 4a_4m^3 - h = 0. \quad (23.6)$$

در دمایی گذار فاز  $a_2 = 0$  و

$$m = \left( \frac{h}{4a_4} \right)^{1/3}, \quad (24.6)$$

که نمودار سیاه‌رنگ در شکل (۴.۶) است. پس نمایی بحرانی  $\delta = 3$  است. در  $h = 0$  مغناطش برای دو فاز مختلف متفاوت است. در دمایی بالاتر از دمایی بحرانی،  $a_2 > 0$  است و



شکل ۴.۶ منحنی مغناطش  $m$ ، بر حسب میدان مغناطیسی  $h$  به ازای  $T = T_c$  (منحنی سیاه‌رنگ)،  $T < T_c$  (منحنی‌های آبی‌رنگ)، و  $T > T_c$  (منحنی‌های قرمز‌رنگ). در حالتی که  $T \geq T_c$  است منحنی مغناطش بر حسب میدان مغناطیسی پیوسته است ولی برای  $T < T_c$  این نمودار ناپیوسته است.

سیستم در فاز بی‌نظم و  $m = 0$  است. در دمای پایین‌تر از دمای بحرانی،  $a_2 < 0$ ، سیستم در فاز منظم و  $m = \pm \sqrt{\frac{-a_2}{2a_4}}$  است. به طور خلاصه

$$m = \begin{cases} 0, & T \geq T_c \\ \pm \sqrt{\frac{-a_2^{(1)}(T - T_c)}{2a_4}}, & T < T_c. \end{cases} \quad (25.6)$$

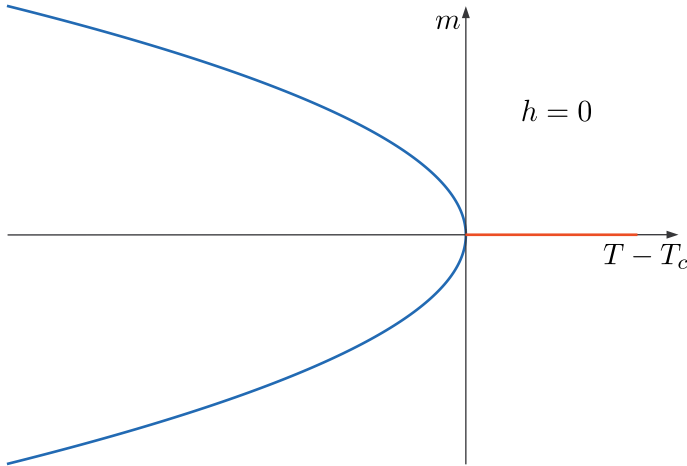
از این‌جا نمای بحرانی  $\beta = 1/2$  می‌شود.

با مشتق‌گیری از رابطه‌ی (۲۳.۶) نسبت به  $h$  و استفاده از تعریف پذیرفتاری مغناطیسی

$$\chi = \left( \frac{\partial m}{\partial h} \right) \Big|_{h=0}, \quad (26.6)$$

می‌رسیم به

$$2a_2\chi + 12a_4m^2\chi - 1 = 0 \Rightarrow \chi = \frac{1}{12a_4m^2 + 2a_2}. \quad (27.6)$$



شکل ۵.۶ منحنی  $m$  بر حسب  $T - T_c$  به ازای  $h = 0$ . در دماهای بالاتر از دمای بحرانی، سیستم در فاز بی‌نظم است و مغناطش صفر است. در دمای  $T_c$  گذار فاز رخ می‌دهد و سیستم می‌تواند یکی از دو مقدار مثبت و یا منفی مغناطش خود به خود را در غیاب میدان مغناطیسی خارجی اختیار کند.

به طور خلاصه نتیجه می‌شود

$$\chi = \begin{cases} \frac{1}{2a_2^{(1)}(T - T_c)}, & T \geq T_c \\ \frac{1}{-4a_2^{(1)}(T - T_c)}, & T < T_c. \end{cases} \quad (28.6)$$

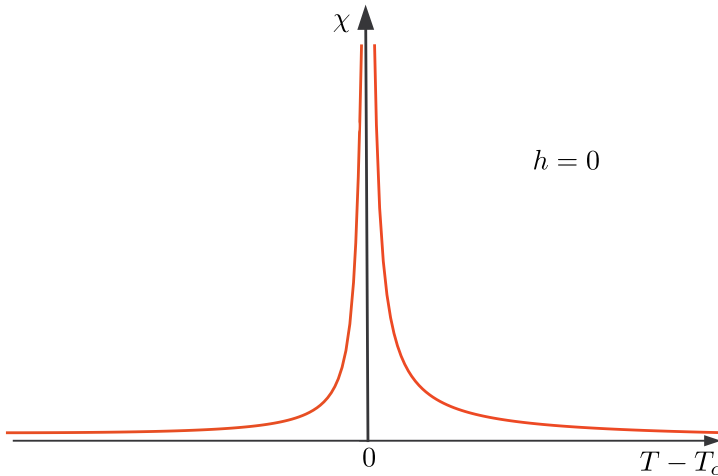
از این‌جا نمای بحرانی  $\gamma^\pm = 1$  می‌شود. همان‌طور که می‌بینیم در دمای بحرانی  $\chi$  تکین می‌شود. هر چند در این تقریب ما نمی‌توانیم در مورد اندازه‌ی ثابت‌هایی که برای دماهای بالاتر و پایین‌تر از دمای بحرانی چیزی بگوییم در این مورد خاص نسبت این ثابت‌ها ۲ است. آخرین کمیتی که در این مدل می‌خواهیم محاسبه کنیم ظرفیت گرمایی در غیاب میدان مغناطیسی است.

مطابق تعریف

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} = -\frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right). \quad (29.6)$$

در این تقریب

$$Z \approx \exp \left[ -V(a_0(T) + a_2(T)m^2 + a_4(T)m^4) \right] \quad (30.6)$$



شکل ۶.۶ منحنی تغییرات پذیرفتاری مغناطیسی،  $\chi$ ، بر حسب  $T - T_c$  به ازای  $h = 0$ . در دمای بحرانی  $\chi$  تکین می‌شود.

و

$$-\ln Z \approx V(a_0(T) + a_2(T)m^2 + a_4(T)m^4) \quad (۳۱.۶)$$

در محاسبه‌ی ظرفیت گرمایی باید از این عبارت نسبت به دما مشتق بگیریم. بخش تابع دمایی جمله‌ی اول یعنی  $a_0(T)$  تابعی تحلیلی است و طبیعتاً سهمش در ظرفیت گرمایی در نزدیکی دمای بحرانی ناپیوسته یا تکین نمی‌شود. ما این بخش را بخش منظم ظرفیت گرمایی می‌نامیم و با  $C_{\text{regular}}$  نمایش می‌دهیم. اما بخش‌های بعدی لازم است به دقت محاسبه شوند. با استفاده از

$$\frac{\partial}{\partial \beta} = -kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \quad (۳۲.۶)$$

(۲۹.۶) تبدیل می‌شود به

$$C = C_{\text{regular}} + V \frac{\partial}{\partial T} \left( -KT^2 \frac{\partial}{\partial T} \cdot (a_2(T)m^2 + a_4(T)m^4) \right). \quad (۳۳.۶)$$

برای دمایی بالاتر از دمای بحرانی  $m = 0$  است که نتیجه می‌دهد بخش نامنظم صفر شود و در این حالت تنها بخش منظم ظرفیت گرمایی باقی بماند. برای دمایی پایین‌تر از دمای بحرانی

$m^2 = \frac{-a_2}{2a_4}$  است. در نزدیکی دمای گذار فاز،  $T \lesssim T_c$ ، این حالت بخش نامنظم

$$C_{\text{irregular}} = -VK T_c^2 \frac{\partial^2}{\partial T^2} \left( \frac{-a_2^2}{4a_4} \right) = \frac{VK T_c^2 (a_2^{(1)})^2}{2a_4}. \quad (۳۴.۶)$$

یا به طور خلاصه در این تقریب ظرفیت گرمایی در دمای گذار فاز یک پرش محدود دارد و نمای بحرانی  $\alpha = 0$  است

$$C = C_{\text{regular}} + \begin{cases} 0, & T > T_c, \\ \frac{VK T_c^2 (a_2^{(1)})^2}{2a_4}, & T \lesssim T_c. \end{cases} \quad (۳۵.۶)$$

## مسائل

۱.۶ انرژی لاندائو را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$L = \int d^d x \{ (\nabla \Phi)^2 + a_2 \Phi^2 + a_4 \Phi^4 + a_6 \Phi^6 \},$$

که  $\Phi$  مغناطش است.

الف- دانسیته انرژی  $\Psi(\Phi)$  را برای  $\Phi$  یک نواخت و به ازای  $t$  های مختلف رسم کنید.

در مورد مغناطش در نزدیکی نقطه گذار فاز چه می‌توانید بگویید؟

ب- تابعیت پذیرفتاری مغناطیسی در نزدیکی نقطه گذار فاز بر حسب  $t$  چه‌گونه

است؟

۲.۶ انرژی لاندائو را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$L = \int d^d x \{ (\nabla \Phi)^2 + \frac{t}{2} \Phi^2 + \Phi^3 + \Phi^4 \}, \quad u > 0$$

که  $\Phi$  مغناطش است.

الف- دانسیته‌ی انرژی  $\Psi(\Phi)$  را برای  $\Phi$  یک نواخت و به ازای  $t$  های مختلف رسم کنید.

ب- مغناطش در دو طرف نقطه‌ی گذارِ فاز چیست؟

۳.۶ انرژی لاندائو را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$L = \int d^d x \{ (\nabla \Phi)^2 + a_2 \Phi^2 + a_{2n} \Phi^{2n} - h \Phi \},$$

که  $n > 1$  عددی صحیح است.

الف-  $a_{2n}$  مثبت است یا منفی؟ چرا؟

ب- در غیاب میدان مغناطیسی،  $h = 0$ ، دانسیته‌ی انرژی  $\Psi(\Phi)$  را برای  $\Phi$  یک نواخت برای حالت‌های مختلف ممکن به طور کیفی رسم کنید.

ج- در حضور میدان مغناطیسی،  $h > 0$ ، دانسیته‌ی انرژی  $\Psi(\Phi)$  را برای  $\Phi$  یک نواخت برای حالت‌های مختلف ممکن به طور کیفی رسم کنید. نماهای بحرانی  $\delta, \beta$  چه هستند؟ نماهای بحرانی  $\gamma^\pm$  چه هستند؟





# منابع







# Critical Phenomena

**AMIR AGHAMOHAMMADI**

UNIVERSITY OF ALZAHRA

2021

<https://www.youtube.com/@amiraghamohammadi>

<https://staff.alzahra.ac.ir/aghamohammadi>

